打ち込み人 (yx4) から一言

たけのうち たんぞう 竹内端三(1887-1945)氏の著書

竹内端三『楕圓函數論(岩波全書 74)』(岩波書店, 1936 年)

は、楕円函数に関する名著として世に知られております。この本の著作権は、著者の死後から 50 年間、すなわち 1995 年 12 月 31 日まで保護されていました。それ以後は、社会全体の公共財産として利用できるようになりました。

現在,健忘書店さん(http://kenboushoten.web.fc2.com/)で,この本の画像が公開されています.この画像を利用させていただき,OCR ソフトを利用し,TeX を使って組んでみました.

組版の方針

漢字について、緒言の部分と固有名詞を除いて、旧字体を新字体で打ち込みました. 読みにくいと思われる漢字について、振り仮名を追加しました. 図が 50 あり、新しく 書いてみようと思いましたが、今回は画像をそのまま使わせていただきました.

謝辞

最後になりましたが、画像を公開されている健忘書店さん、著作権に関してご教示いただいた著作権情報センターさん、マクロの作者の方々、そして著者の竹内先生に心から感謝いたします.

その他

ご意見などがありましたら、yx4まで電子メールでお送り下さい.

e-mail: yx4.aydx5@gmail.com

楕圓凾數論

竹内 端三

緒言

楕圓函數の誕生日は Jacobi によれば西曆 1751 年 12 月 23 日であるといふ. 此日 Euler が Fagnano の提出した論文の審査を委囑されたのであるが, 之が動機となつて 彼の加法定理に關する研究が始まつたのであるから如何にも楕圓函數の誕生日ともい へよう. 併し古くは今日の楕圓積分のことを楕圓函數と稱したので, 積分の逆函數を 考へるといふ思想は 1827 年 9 月 20 日の Abel の論文を以て嚆矢とする. これを新らしい楕圓函數の誕生日としても旣に今日までに百年を經て居る. いつまでも楕圓函數を敬遠して居るべきではあるまい, 理論上にも實用上にも之を恰かも三角函數の如くに自在に利用して然るべきである.

本書は楕圓函數論の入門で、先年岩波講座「數學」中の一項目として執筆したものを修正增減したものである。楕圓函數の特色はその二重週期性にある、而してその必然の結果として複素變數の函數を考へなければならぬ。故に本書に於ては最初から一般函數論の知識をすべて豫期することとした、蓋し實數の範圍のみで楕圓函數を論ずるのは姑息であるのみならず、邦文數學書の普及した今日にあつては一般函數論の知識を準備することは左程難事でないと信ずるからである。

本書は單に入門書である. 更に進んで深く廣く研究せんとする人々のために卷末に參考書に關して記載して置いた, 何等かの指針とならば幸である.

昭和十一年一月

著者識

目次

第一章	楕円積分	1
1.	楕円積分	1
2.	標準形	4
3.	標準形(続き)	7
4.	実楕円積分	11
5.	楕円無理函数	13
6.	楕円積分の多価性	16
7.	楕円積分の分類	20
8.	第一種楕円積分	22
9.	第一種楕円積分の数値計算	23
10.	第一種楕円積分の数値計算(続き)	27
第二章	Jacobi の楕円函数	31
11.	第一種楕円積分の逆函数	31
12.	週期函数	32
13.	楕円函数	36
14.	sn 函数	37
15.	cn,dn 函数	41
16.	加法公式	42
17.	乗法公式	46
18.	不定積分	48
19.	実楕円函数	50
20.	Landen の変換	53
21.	第一種実楕円積分の計算	57
第三章	Weierstrass の楕円函数	61
22.	記号及び規約	61
23.	楕円函数の一般性質..............................	61
24.	ρ 函数	65
25.	_Ø 函数の一例	71
26.	ζ函数	73
27.	σ函数	75
28.	楕円函数の表示	77
29.	ρ, ζ 及び σ 函数の加法公式	79

iv 目次

30.	ρ 函数の乗法公式	81
31.	楕円函数の特性	84
32.	$\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ 函数	87
第四章	ϑ 函数	91
33.	$artheta$ 函数 \dots	91
34.	週期に対する性質・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	92
35.	無限乗積展開	95
36.	σ 函数との関係	98
37.	ρ 函数との関係	99
38.	sn 函数との関係	102
39.	楕円積分の計算	102
40.	楕円の弧長	106
41.	双曲線の弧長	108
第五章	母数函数	111
第五章 42.		111 111
		111
42.	絶対不変式	111 114
42. 43.	絶対不変式	111 114 117
42. 43. 44.	絶対不変式	111 114 117 121
42. 43. 44. 45.	絶対不変式	111 114 117 121
42. 43. 44. 45. 46.	絶対不変式	111 114 117 121 122 127
42. 43. 44. 45. 46. 第六章	絶対不変式 .	111 114 117 121 122 127
42. 43. 44. 45. 46. 第 六章 47.	絶対不変式 .	1111 114 117 121 122 127 127 128
42. 43. 44. 45. 46. 第六章 47. 48.	絶対不変式 基本領域 $J(\tau)$ の値 母数函数 函数 $\lambda(\tau)$ 補遺 sn 函数の一価性 代数的加法公式を有する函数 代数的加法公式を有する函数(続き)	1111 114 117 121 122 127 127 128

1. 楕円積分

有理函数の不定積分は有理函数及びその対数函数を以て表される,但し通常は積分学では実数のみを取扱ふために逆三角函数をも使用するが之は複素数を用ゐれば対数函数に帰着されることは函数論で知られる通りである。さて次には無理函数の積分を考へる順序となるが,その中で最簡単な二次の無理函数の積分は一般に

$$\int R\Big\{z, \sqrt{\varphi(z)}\Big\} dz \tag{1}$$

なる形を有する, $c > c \varphi(z)$ は z に関する多項式,R は z 及び $\sqrt{\varphi(z)}$ に関する有理 函数とする. $\varphi(z)$ が z の一次式又は二次式なるときには (1) は容易に積分されて其結 果は矢張り z と $\varphi(z)$ との有理函数及びその対数函数で表される,これは積分法の初歩 で直ちにわかることである.ところが $\varphi(z)$ が三次以上になると一般に (1) を既知の初 等函数(1) を以て有限の形に表すことは出来ない. $\varphi(z)$ が三次式なるときと四次式なる ときとは全く同様に論ぜられるので,この二つの場合に於ける積分で (1) のことを総称して楕円積分(2)といふ.楕円の周の長さを計算するときの積分が此種のものに属する ところから斯く名づけられたのである.

任意の楕円積分は之を適当に変形することによつて或る簡単なる標準の形に帰着せ しめることが出来る.次に之を説明する.先づ簡単のために

$$\sqrt{\varphi(z)} = s, \quad R(z,s) = f(z)$$

とすれば, (1) は

$$\int f(z) dz \tag{2}$$

となる. $C > C \varphi(z)$ は三次式又は四次式と考へるのであるから

$$\varphi(z) = a_0 z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4 \tag{3}$$

と置き,

(i) $\alpha_0 \neq 0$ なるか、然さらざれば $\alpha_1 \neq 0$.

と仮定する、何となれば α_0,α_1 共に 0 なら $\varphi(z)$ は二次以下の式となるからである.又

(ii)
$$\varphi(z) = 0$$
 なる z に対しては $\varphi'(z) \neq 0$

⁽¹⁾ 代数函数及び初等超越函数を有限回数だけ結合したものをいふ.

⁽²⁾ 楕は橢の略字.

と仮定する,何となれば若し同時に $\varphi(z)=\varphi'(z)=0$ となるならば $\varphi(z)=0$ は z に関して少くも一つの平方因数を有するからこれを $\sqrt{\varphi(z)}$ の根号の外に出してしまへば結局 (2) は初等函数となつて特に論ずる必要がないからである.

さて(2)の被積分函数は次の如くに整頓される.

$$f(z) = \frac{A_1 + A_2 s}{B_1 + B_2 s},$$

 $\mathtt{c} > \mathtt{ic}\ A_1, A_2, B_1, B_2$ は各 z に関する多項式である. 更に此分母及び分子に $B_1 -\ B_2 s$ を乗じて整頓すれば

$$f(z) = \frac{C_1 + C_2 s}{D}$$

となる、 $C > C_1, C_2, D$ はまた各 z に関する多項式である。更に之を変形すれば

$$f(z) = \frac{C_1}{D} + \frac{C_2 s^2}{Ds} = R_1 + \frac{R_2}{s}$$

となる,こゝに R_1,R_2 は z に関する有理函数である.依つて (1) なる積分は R_1 及び $\frac{R_2}{s}$ の積分の和に直される. R_1 は容易に積分可能であるから,結局問題は $\frac{R_2}{s}$ の積分を考へることに帰着する.

 R_2 が真分数 (即ち分子が分母よりも低次なるもの) ならば其ま > ,もし然らざれば 之を一つの多項式と真分数との和に直して,之を部分分数式に分解すれば,

$$R_2 = \sum_h C^h z^h + \sum_k \frac{A_k}{(z-a)^k} + \sum_l \frac{B_l}{(z-b)^l} + \cdots$$

の如き形となる,こゝにC, A, B, \cdots , a, b, \cdots はすべて常数とする.従つて $\frac{R_2}{s}$ の積分は次の二種の積分の和として表される.

$$I_h = \int \frac{z^h}{s} dz, \qquad h = 0, 1, 2, \dots,$$

$$J_k = \int \frac{dz}{(z-a)^l s}, \quad k = 1, 2, \dots.$$

I なる積分の間には或る一次関係が成立する.之を求めるために,先づ z^hs なるもの を z に関して微分すれば,

$$\frac{d}{dz}(z^hs) = hz^{h-1}s + \frac{1}{2}z^h\frac{\varphi'(z)}{s} = \frac{z^{h-1}}{2s}\Big\{2h\varphi(z) + z\varphi'(z)\Big\}$$

ごゝで $\varphi(z)$ の代りに(3))の右辺を入れゝば次の結果を得る,

$$\frac{d}{dz}(z^h s) = \frac{z^{h-1}}{2s} \left\{ (2h+4)a_0 z^4 + (2h+3)a_1 z^3 + (2h+2)a_2 z^2 + (2h+1)a_3 z + 2ha_4 \right\}$$

此両辺を β に関して積分すれば、

$$2z^{h}s = (2h+4)a_{0}I_{h+3} + (2h+3)a_{1}I_{h+2} + (2h+2)a_{2}I_{h+1} + (2h+1)a_{3}I_{h} + 2ha_{4}I_{h-1}.$$

これ即ち求める一次関係である。特にh=0とすれば、

$$2s = 4a_0I_3 + 3a_1I_2 + 2a_2I_1 + a_3I_0$$

1. 楕円積分 3

となる. 故に任意の I_h を

$$a_0$$
 $=$ 0 なるときは I_2,I_1,I_0 の三つで、 $a_0=0,a_1$ $=$ 0 なるときは I_1,I_0 の二つで、

表すことが出来る.

次にJなる積分についても同様の一次関係を見い出すことが出来る。それには先づ微分法によつて

$$\frac{d}{dz} \frac{s}{(z-a)^k} = -\frac{ks}{(z-a)^{k+1}} + \frac{1}{2} \frac{\varphi'(z)}{(z-a)^k s}$$
$$= \frac{1}{2s(z-a)^{k+1}} \left\{ -2k\varphi(z) + (z-a)\varphi'(z) \right\}$$

なる関係を作り、この中の $\varphi(z)$ にまた (3) の右辺を代入するのであるが、今度は便宜上 (3) の右辺を $(z-\alpha)$ の昇冪に排列して置いてから代入することにする。計算の結果は次の様になる、

$$\frac{d}{dz} \frac{s}{(z-a)^k} = \frac{1}{2s(z-a)^{k+1}} \left\{ -2k\varphi(a) + (1-2k)\varphi'(a)(z-a) + (1-k)\varphi''(a)(z-a)^2 + \frac{3-2k}{6}\varphi'''(a)(z-a)^3 + \frac{2-k}{12}\varphi''''(a)(z-a)^4 \right\}.$$

この両辺をzに関して積分すれば次の関係を得る,

$$\frac{2s}{(z-a)^k} = -2k\varphi(a)J_{k+1} + (1-2k)\varphi'(a)J_k + (1-k)\varphi''(a)J_{k-1} + \frac{3-2k}{6}\varphi'''(a)J_{k-2} + \frac{2-k}{12}\varphi''''(a)J_{k-3}.$$

特にk=1とすれば

$$\frac{2s}{z-a} = -2k\varphi(a)J_2 - \varphi'(a)J_1 + \frac{1}{6}\varphi'''(a)J_{-1} + \frac{1}{12}\varphi''''(a)J_{-2}$$

となる. 之に依つて、任意の J_k が

$$arphi(a) \pm 0$$
 なるときは J_1,J_0,J_{-1},J_{-2} の四つで, $arphi(a)=0,arphi'(a) \pm 0$ なるときは J_0,J_{-1},J_{-2} の三つで

表されることになる. 但し J_0, J_{-1}, J_{-2} は前に定義されてないが、その意味は容易に類

推される通り

$$J_0 = \int \frac{dz}{s} = I,$$

$$J_{-1} = \int \frac{z - a}{s} dz = I_1 - aI_0,$$

$$J_{-2} = \int \frac{(z - a)^2}{s} dz = I_2 - 2aI_1 + a^2I_0$$

で、何れも I を以て表されるものである。故に結局すべての I_k 及び J_k は悉く

$$I_0, I_1, I_2, J_1$$

の四つを以て表されることが判る. 従つてまた任意の楕円積分は既知の初等函数の他に上記の四つの積分を用ゐれば之を表し得ることが判る. 後の参照のために此四つを次に記して置く.

$$I_{0} = \int \frac{dz}{\sqrt{\varphi(z)}}, \qquad I_{1} = \int \frac{zdz}{\sqrt{\varphi(z)}},$$

$$I_{2} = \int \frac{z^{2}dz}{\sqrt{\varphi(z)}}, \qquad J_{1} = \int \frac{dz}{(z-a)\sqrt{\varphi(z)}}.$$

$$(4)$$

但し上述の研究によつて明かなる如く, $\alpha=0$ なる時 (即ち $\varphi(z)$ が三次式なるとき) は I_2 は不用であるし,又 $\varphi(a)=0$ なるときは J_1 は不用である.

2. 標準形

前節の研究に於ては $\varphi(z)$ について (i), (ii) の他には何等の仮定をも加へなかつたが, $\varphi(z)$ を或る特殊の形にして置く方が実際の計算上にもまた理論的の研究上にも便利なことが多い. 依つて次に $\varphi(z)$ を特殊の形にすることを考へて見る.

前節の記号を踏襲することとし.

$$\int R\Big\{z, \sqrt{\varphi(z)}\Big\} dz \tag{1}$$

に於て今 $\varphi(z)$ を次の如き四次式と考へる,

$$\varphi(z) = a(z - \alpha_0)(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)(z - \alpha_3)$$

但しa 及び α は常数で、特に四つの α は悉く相等しからざるものとする (1) に於て今次の如き一次変換を行つたとする、

$$z = \frac{A\zeta + B}{C\zeta + D}, \qquad AD - BC \neq 0,$$

A, B, C, D は勿論常数である。その結果 (1) は矢張り一つの楕円積分となる、それを

$$\int R_1 \left\{ \zeta, \sqrt{\varphi_1(\zeta)} \right\} d\zeta,$$

$$\varphi_1(\zeta) = c(\zeta - \beta_0)(\zeta - \beta_1)(\zeta - \beta_2)(\zeta - \beta_3) \tag{2}$$

2. 標準形 5

とし、こゝに

$$\alpha_i = \frac{A\beta_i + B}{C\beta_i + D}, \qquad i = 0, 1, 2, 3$$

とすれば,

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_2} \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{\alpha_3 - \alpha_0} = \frac{\beta_1 - \beta_0}{\beta_1 - \beta_2} \frac{\beta_3 - \beta_2}{\beta_3 - \beta_0}$$
(3)

なる関係があることは容易に証明される.

(3) は即ち四つの α と四つの β との各の非調和比が相等しいことを示すもので,之に依つて β を四つとも任意に指定することは出来ないことが判るが,三つだけならば互に相等しくない限り任意に定めることが出来る.例へば $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ を夫々 $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ (これは互に相等しくない様に任意に与へたとする) に対応させようと思へば

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_2} \frac{z - \alpha_2}{z - \alpha_0} = \frac{\beta_1 - \beta_0}{\beta_1 - \beta_2} \frac{\zeta - \beta_2}{\zeta - \beta_0}$$

なる一次変換を行へばよい.

今吾々は都合上 $\alpha_1,\alpha_0,\alpha_3$ を夫々 $0,1,\infty$ といふ特別なる数に対応させることにする. 之に対する一次変換は

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_0}{\alpha_1 - z} \frac{\alpha_3 - z}{\alpha_3 - \alpha_0} = \frac{0 - 1}{0 - \zeta} \frac{\infty - \zeta}{\infty - 1} = \frac{1}{\zeta}$$

即ち

$$z = \frac{\alpha_3(\alpha_1 - \alpha_0)\zeta - \alpha_1(\alpha_3 - \alpha_0)}{(\alpha_1 - \alpha_0)\zeta - (\alpha_3 - \alpha_0)}$$

であつて、実際これで変換を行へば

$$\int R\{z, \sqrt{\varphi()}\} dz = \int R_1\{\zeta, \sqrt{\zeta(1-\zeta)(1-\lambda\zeta)}\} d\zeta \tag{4}$$

なる形の結果を得る、こゝに

$$\lambda = \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_2} \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{\alpha_3 - \alpha_0}$$

である, λ は四数 $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ の非調和比で,之を $(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ なる記号で表すこととする.最初 $0,1,\infty$ に対応させる三数を $\alpha_1,\alpha_0,\alpha_3$ の代りに他の数又は他の順序に種々に変ずれば,全部で $_4P_3=24$ 通り仕方がある.その中で或る四通りづつは同じ λ の値を与へるので,結局 λ の相異なるものが六箇出来る.その一つを上の λ とすれば,全部の値は

$$\lambda, \quad \frac{1}{\lambda}, \quad 1 - \lambda, \quad \frac{1}{1 - \lambda}, \quad \frac{\lambda}{\lambda - 1}, \quad \frac{\lambda - 1}{\lambda}$$
 (5)

例へば $0,1,\infty$ に対応させるものを夫々 $\alpha_1,\alpha_0,\alpha_3$ とすれば,(4) に於ける λ の代りに

$$(\alpha_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_0) = \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_2} \frac{\alpha_0 - \alpha_2}{\alpha_0 - \alpha_3} = 1 - \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_2} \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{\alpha_3 - \alpha_0}$$
$$= 1 - \lambda$$

が現れる. もし又 $\alpha_1, \alpha_0, \alpha_2$ とすれば

$$(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_3, \alpha_2) = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$$

が現れる.

 $0,1,\infty$ に対応させる α の番号と之に対する λ の値とを全部列挙すれば次の如くである。 (左方の $0,1,\infty$ の下に 1,0,3 とあるのは $\alpha_1,\alpha_0,\alpha_3$ が $0,1,\infty$ に対応すること,又 その右に (0123) とあるのは其時の λ の値が $(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ なることを示す。 其他も 之に準する。)

	0	1	∞		0	1	∞	
	1	0	3	(0123)	1	2	0	(2130)
	0	1	2	(1032) λ	2	1	3	(1203) 1
	2	3	0	(3210)	3	0	2	$(0312) \int \overline{1-\lambda}$
	3	2	1	(2301)	0	3	1	(3021)
_	1	2	3	(2103)	1	0	2	(0132)
	2	1	0	(1230) 1	0	1	3	(1023) λ
	0	3	2	$(3012) \int \overline{\lambda}$	3	2	0	$(2310) \int \overline{1-\lambda}$
	3	0	1	(0321)	2	3	1	(3201)
	1	3	0	(3120)	1	3	2	(3102)
	3	1	2	$(1302) \begin{cases} 1 - \lambda \end{cases}$	3	1	0	$(1320) \lambda - 1$
	2	0	3	$(0213) \int_{-\infty}^{\infty} 1 - \lambda$	0	2	3	$(2013) \int \overline{\lambda}$
	0	2	1	(2031)	2	0	1	(0231)

(5) に挙げた六つの式は何れも λ の一次函数で、これらを相互に如何様に結合しても矢張り此六種の他に出でないのである.

例へば

$$f_1(\lambda) = 1 - \lambda, \quad f_2(\lambda) = \frac{1}{1 - \lambda}$$

とすれば,

$$f_1 f_2(\lambda) = 1 - \frac{1}{1 - \lambda} = \frac{\lambda}{\lambda - 1}, \quad f_2 f_1(\lambda) = \frac{1}{1 - (1 - \lambda)} = \frac{1}{\lambda}$$

で、この結果は相異なるがとにかく最初の六つの中のものである.

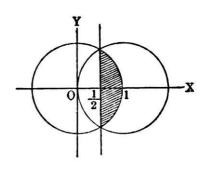
即ち(5)なる六つの一次函数は一つの有限群を作つてゐる.

 λ の値は一般に複素数であるが、今数平面を適当に六つに区分すると其各図をそれぞれ上述の六つの函数の値に対応する様にすることが出来る。詳しくいへばその任意の一区内の一点を λ とすると、 $\frac{1}{\lambda}$, $1-\lambda$, \cdots 等に該当する点は

夫々他の各区内に丁度一つづゝ含まれることになるのである.途中の考へを省略して直ちに結果を述べると,数平面を次の二円及び一直線によつて区分すれば宜いのである.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ (x - 1)^2 + y^2 = 1, \\ x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

此六区の中の何れの図の点でも之を λ とすれば、他の各区の点がそれぞれ $\frac{1}{2}$, $1-\lambda$, …



第1図

3. 標準形 (続き) 7

となるので、六区は何れも同等の資格のもの であるが、後の便宜上

$$x^2 + y^2 \le 1 \quad \exists \quad x \ge \frac{1}{2}$$

なる一区 (第1図に陰影を施してある弓形) を (5) なる函数群の**基本領域**と名づける. 厳密にいへば基本領域としては此弓形の周は全部とる必要はないのであるが其詳細な 吟味は読者の演習として残す. 任意の四数が与へられたとき之を適当の順序に排列す れば常にその非調和比の値を基本領域内に入れることが出来る,而して斯くの如き排 列法は上の研究によつて四通りあることが判る.

例へば $\alpha_0=0, \alpha_1=1, \alpha_2=2, \alpha_3=i$ とすれば、非調和比の値が基本領域に入る如き順列は次の四通りだけである.

$$(01i2) = (102i) = (2i10) = (i201) = \frac{3+i}{4}$$

さて (4) に於て更に

$$\zeta = \xi^2$$

と置けば

$$\int R_1 \left\{ \xi^2, \xi \sqrt{(1 - \xi^2)(1 - \lambda \xi^2)} \right\} 2\xi \, d\xi$$

$$= \int R_2 \left\{ \xi, \sqrt{(1 - \xi^2)(1 - \lambda \xi^2)} \right\} d\xi$$

の如き形になる,但し R_2 はまた一つの有理函数である.この最後の形に於ては通常 λ の代りに為 k^2 と書く.しかし根号の中を $(1-\xi^2)(1-k^2\zeta^2)$ の形にするのが目的ならば上記の手続によらずして唯一回の一次変換でも出来る.次に之を述べる.

3. 標準形 (続き)

前節の方法では三つの α に或る特別な三つの β の値を対応させたのであるが,今度は仕方をかへて四つの α に四つの β の値を対応させることにする,但し其代り四つの β の間に次の如く k なる任意常数 (パラメーター) を含ませてそれで対応が出来る様に調節させることにする.

$$\begin{array}{c|c|c} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \hline 1 & \frac{1}{k} & -1 & -\frac{1}{k} \end{array} , \qquad \varphi(\zeta) = c(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta)$$

然すれば前節の(3)によつて

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_2} \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{\alpha_3 - \alpha_0} = \frac{\frac{1}{k} - 1}{\frac{1}{k} + 1} \frac{-\frac{1}{k} + 1}{-\frac{1}{k} - 1}$$

なる関係が成立しなければならぬ. 之によつて k の値が定まる. 此左辺は一つの既知数である、之を前の通り λ とすれば、

$$\lambda = \frac{\frac{1}{k} - 1}{\frac{1}{k} + 1} - \frac{\frac{1}{k} + 1}{-\frac{1}{k} - 1} = \left(\frac{1 - k}{1 + k}\right)^2$$

依つて

$$k = \frac{1 - \sqrt{\lambda}}{1 + \sqrt{\lambda}}$$
 $\forall k$ $\frac{1 + \sqrt{\lambda}}{1 - \sqrt{\lambda}}$

但し $\sqrt{\lambda}$ は λ の二つの平方根の中の何れか一方を表すものとする.

さてkを斯くの如き値として、所要の変換をなす式を求めるには、例へば α_1 の位置に変数を置いて

$$\frac{z - \alpha_0}{z - \alpha_2} \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{\alpha_3 - \alpha_0} = \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} \frac{-\frac{1}{k} + 1}{-\frac{1}{k} - 1} = \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} \frac{1 - k}{1 + k}$$
$$= \pm \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} \sqrt{\lambda}$$

とすればよい. 此変換によつて前節の(1)は次の様になる,

$$\int R_1 \left\{ \zeta, \sqrt{c(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)} \right\} d\zeta.$$

常数 c は根号の外に出すと考へれば最初から c=1 として宜い.依つて任意の楕円積分について考へる代りに

$$\int R\{z, \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}\} dz \tag{1}$$

について考へれば宜いことになる.

(1) なる積分に対して前々節の所論を適用すれば、結局これは次の四つの積分に帰着することになる.

$$I_{0} = \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^{2})(1-k^{2}z^{2})}}, \quad I_{1} = \int \frac{zdz}{\sqrt{(1-z^{2})(1-k^{2}z^{2})}},$$

$$I_{2} = \int \frac{z^{2}dz}{\sqrt{(1-z^{2})(1-k^{2}z^{2})}}, \quad J_{1} = \int \frac{dz}{(z-a)\sqrt{(1-z^{2})(1-k^{2}z^{2})}}$$

$$(2)$$

以上の中で、 I_1 に於ては $z^2 = t$ と置けば

$$I_1 = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{(1-t)(1-k^2t)}}$$

となつて之は容易に初等函数で積分が出来るから特に問題とするに足らぬ. 次に I_2 は下の如くに書き直される、

$$I_2 = \frac{1}{k^2} \left\{ \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} - \int \sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}} \, dz \right\}.$$

この右辺にある第一の積分は即ち I_0 である,故に I_2 の代りに

$$\int \sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}} \, dz$$

のみを新たに採ればよい. 最後に J_1 を書き直せば,

$$J_1 = \int \frac{zdz}{(z^2 - a^2)\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} + a \int \frac{dz}{(z^2 - a^2)\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}$$

3. 標準形 (続き) 9

となる.この右辺の第一の積分は $z^2=t$ と置けば容易に初等函数で表される,故に J_1 の代りに新たに

$$\int \frac{dz}{(z^2 - a^2)\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}$$

のみを採ることにする. 依つて (2) の代りに次の三つの積分を考へればよいことになる.

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \quad \int \sqrt{\frac{(1-k^2z^2)}{(1-z^2)}} dz, \\
\int \frac{dz}{(z^2-a^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$
(3)

以上すべて $\varphi(z)$ を四次式と考へて論じたのであるが,之が三次式の場合でも全く同様に取扱はれる.即ち其場合には四つの α の中三つは $\varphi(z)=0$ の根,残りの一つは ∞ と考へて上の通りの計算を行へばよいので,其結果は矢張り (3) なる三つの積分に帰着する.(一つの α を ∞ と考へることは, $\sqrt{\varphi(z)}$ の分岐点が一つ ∞ にあることからも明かであるし,又三次方程式 $\varphi(z)=0$ は四次方程式の z^4 の項の係数が 0 に収斂した極限と考へられることからも明かである.) 前節及び本節の結果を纏めて次の如くいふことが出来る.任意の楕円積分は初等函数及び次の三種の積分を以て表される.

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

$$\int \sqrt{\frac{(1-k^2z^2)}{(1-z^2)}} dz,$$

$$\int \frac{dz}{(z^2-a^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

此三種の積分を楕円積分の標準形といひ、上記の順で上から夫々第一種、第二種、第三種の標準形といふ、k を母数、a をパラメーターといふ。

なほ上の理論に於ける β の定め方次第で之とは違つた形の積分を標準形として選定することも出来る、依つて特に他の標準形と区別するときには、之を Legendre-Jacobi の標準形といる.

もし前節に述べた如く根号の中を $z(1-z)(1-\lambda z)$ の形のま > にして置けば、三種の標準形として次の積分を得る.

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-\lambda z)}}, \quad \int \frac{zdz}{\sqrt{z(1-z)(1-\lambda z)}}, \quad \int \frac{dz}{(z-a)\sqrt{z(1-z)(1-\lambda z)}}.$$

之を Riemann の標準形といふ.

併し以下では Legendre-Jacobi の方のみを用ゐるから之を単に標準形と呼ぶことにする.

例 1. $\int \frac{dz}{\sqrt{z^4+1}}$ を標準形に直すこと. $\varphi(z)=z^4+1=0$ の四根を

$$\alpha_0 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad \alpha_1 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \quad \alpha_2 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}, \quad \alpha_3 = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}$$

とすれば,

$$\lambda = \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_2} \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{\alpha_3 - \alpha_0} = \frac{1}{2}, \quad k = \frac{1 - \sqrt{\lambda}}{1 + \sqrt{\lambda}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}.$$

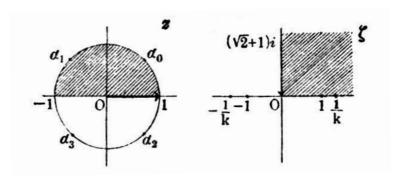
標準形に直すための一つの一次変換は次の様になる,

$$\frac{z - \frac{1+i}{\sqrt{2}}}{z - \frac{1-i}{\sqrt{2}}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}.$$

之によつて実際に計算して見ると

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^4 + 1}} = (2 - \sqrt{2})i \int \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - k^2 \zeta^2)}}, \quad k = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}$$

となる. 此場合に於ける, z と ζ との関係を図示すれば, 次の如くである.



第2図

例 2. $\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^3}}$ を標準形に直すこと. 此場合には

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \quad \alpha_2 = \infty, \quad \alpha_3 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

として見ると,

$$\lambda = \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{\alpha_3 - \alpha_0} = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}, \quad \sqrt{\lambda} = \frac{\sqrt{3} - i}{2}, \quad k = \frac{1 - \sqrt{\lambda}}{1 + \sqrt{\lambda}} = (2 - \sqrt{3})i.$$

所要の一次変換の式は

$$\frac{z - \alpha_0}{\alpha_2 - \alpha_0} = \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} \sqrt{\lambda},$$

即ち

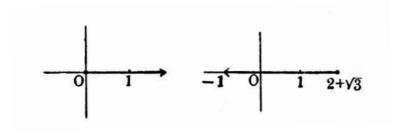
$$z - 1 = -\sqrt{3} \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} \sqrt{\lambda}$$

となる. 之に依つて実際に変換を行へば

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 + 1}} = \frac{2\sqrt{2}i}{\sqrt[4]{3}(1 + \sqrt{3})} \int \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - k^2\zeta^2)}}, \quad k = (2 - \sqrt{3})i$$

となつて、 $z > b \zeta$ との関係は次の図の如くである.

4. 実楕円積分 11



第3図

4. 実楕円積分

一般に楕円積分

$$\int R\left\{z,\sqrt{\varphi(z)}\right\}\,dz$$

に於て $\varphi(z)$ の係数がすべて実数で,且積分路が z 平面の実軸の一部又は全部なるとき,之を実楕円積分といる.実際に多くの応用問題に現れる楕円積分は大抵実楕円積分である.然るに前節の例で明かなる如く実楕円積分と雖も之を標準形に直すと,母数は必ずしも実数ではない,又 z の積分路が実軸上にあつても ζ の積分路は必ずしも実軸上にはない.

しかし若し実楕円積分に於て $\varphi(z)=0$ の四根を適当なる順序に $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ と命名し,又必要に応じて ζ に或る簡単なる変換を行ふことにすれば,k を常に実数にして且 $0< k^2<1$ ならしめることが出来る,而して同時に新しい積分変数の積分路を実軸上にあらしめ得る.次に之を説明する.代数学でよく知られて居る通り, $\varphi(z)$ の係数がすべて実数なるときは $\varphi(z)=0$ の根の中に実数ならざるものがある場合にはその箇数は必ず偶数で,二つづゝ互に共軛なる複素数になつてゐる筈である.依つて四根とも実なる場合と,二根だけ実なる場合と,実根がない場合との三つに分けて論ずることにする.但し等根はないものと考へる,又 $\varphi(z)$ が三次なるときは ∞ なる一根を補つて総計矢張り四根とする,而して ∞ は実根と見做すのである.

(I) 四根ともに実数なる場合には之を大さの順に次の如く命名する,

$$\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_3 < \alpha_2$$
.

然すれば

$$\lambda = \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_2} \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{\alpha_3 - \alpha_0} > 0.$$

従つて

$$0 < k^2 = \left(\frac{1 - \sqrt{\lambda}}{1 + \sqrt{\lambda}}\right)^2 < 1$$

なること明かである. 又zと ζ との関係は

$$\frac{z - \alpha_0}{z - \alpha_2} \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{\alpha_3 - \alpha_0} = \sqrt{\lambda} \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} \tag{1}$$

で、この係数はすべて実数であるから、zの実数値は ζ の実数値に対応することが判る.

(II) 二根だけが実数なる場合には之を α_0 及び α_2 とし、他の二根を α_0 及び α_3 とする、後の二者は互に共軛なる複素数である.然るときは

であるから,

$$|\lambda| = \left| \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_2} \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{\alpha_3 - \alpha_0} \right|,$$

従つてまた

$$\left|\sqrt{\lambda}\right| = 1.$$

故に

$$\sqrt{\lambda} = e^{-2i\theta}$$
 (θは実数)

と置くことが出来る. 然すれば

$$k = \frac{1 - \sqrt{\lambda}}{1 + \sqrt{\lambda}} = \frac{1 - e^{-2i\theta}}{1 + e^{-2i\theta}} = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{e^{i\theta} + e^{-i\theta}} = i \tan \theta.$$

故に k^2 は負なる実数である⁽³⁾.

さてzと ζ との関係を考へるために、(1)を書き直して

$$\frac{z - \alpha_0}{z - \alpha_2} \sqrt{\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_0} \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{\alpha_3 - \alpha_0}} = \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}$$
 (3)

なる形にして見ると、(2) に述べたことによつて (3) の左辺の根号の中の式は正数であるから、z の実数値は ζ の実数値に対応することが判る。そこで

$$\sqrt{1 - k^2 \zeta^2} = t$$

と置けば $k^2 < 0$ であるから、t も亦実数値のみをとる。而して此変換によつて

$$\int \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} = -\frac{1}{\sqrt{k^2-1}} \int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-h^2t^2)}}$$

となり、こゝに

$$h^2 = \frac{1}{1 - k^2}$$

であるから此新母数に就ては明かに $0 < h^2 < 1$ である. (第二種及び第三種の標準形 に於ても母数は矢張りこれと同じ h になる. このことは次の (III) 場合に於ても同様 である.)

(III) 四根ともに実数ならざるとき、 α_0 と α_2 とを一双の共軛根、また α_1 と α_3 とを他の一双の共軛根とすれば

$$\alpha_1 - \alpha_0$$
 と $\alpha_3 - \alpha_0$ とは共軛, $\alpha_1 - \alpha_2$ と $\alpha_3 - \alpha_2$ とは共軛

 $^{^{(3)}}$ k=0 なることはない,何となればそのためには $\lambda=1$ でなければならぬが四つの α が悉く相異なると考へるから之は不可能である.序に, $k^2=1$ ならざることも同様にして判る.今後特に断らなくとも k^2 は 0 でも 1 でもないと考へる場合が多い.

5. 楕円無理函数 13

である. 依つて明かに

$$\lambda = \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_2} \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{\alpha_3 - \alpha_0} > 0,$$

従つて

$$0 < k^2 = \left(\frac{1 - \sqrt{\lambda}}{1 + \sqrt{\lambda}}\right)^2 < 1$$

である. 又 z と ζ との関係については前の (3) によつて見れば、左辺の根号の中の式の絶対値が 1 となるから

$$\left| \frac{z - \alpha_0}{z - \alpha_2} \right| = \left| \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} \right|$$

なる関係を得る. 今 z が実数なりとすれば此左辺は 1 に等しい、従つて

$$|\zeta - 1| = |\zeta + 1|$$

即ち ζ は数平面上に於て二点 1 及び-1 から等距離にある,換言すれば虚軸上にあるのである.依つて

$$\frac{i\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = t$$

と置けば、t は実数であつて、この変換によつて

$$\int \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} = -i \int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-h^2t^2)}}$$

となり、こゝに

$$h^2 = 1 - k^2$$

である. 故に確かに $0 < h^2 < 1$ である.

例 前節の例1は(III)の場合,例2は(II)の場合に該当する.

以上の研究により、実楕円積分を標準形に直すときは、第一種及び第二種に於ては常に $0 < k^2 < 1$ で且之を矢張り実積分ならしめることが出来る。第三種の場合に於ても k^2 は上と同様で,又積分変数の値を実数ならしめ得ることも上と同様であるが、此場合には k の他に「パラメーター」a なるものがあつて之は必ずしも実数ではない、従つて第三種の標準形は必ずしも実積分にはならないのである。

5. 楕円無理函数

扨今までに述べ来つたことは主として楕円積分の形式的取扱であつて未だ深くその本質を闡明したとはいへないのである。これからもう少し深く立入つた函数論的の研究を試みようと思ふ。依つて先づ $\varphi(z)$ をzの四次式とし,第 1 節の (i), (ii) なる条件を満足せしめるものと仮定し,一般に

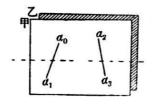
$$R(z,s), \quad s = \sqrt{\varphi(z)}$$

なる形の二次無理函数について考へることにする. 之を楕円無理函数といふ.

楕円無理函数は代数函数の極めて特別なる場合であるから其性質は代数函数論でも 又一般函数論でもよく知られて居るが、主なる結果のみを次に摘記する.

 $\varphi(z)=0$ の四根を $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3(\varphi(z)$ が三次式なるときは一つの α を ∞ とすることは前の通り) とすると、仮定により此四根はすべて相異なるものである。函数 R(z,s) の分岐点は四点 $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ であつて、此函数に対応する Riemann 面は次の如くにして作られる。

先づ甲乙二枚の複素数平面をとり、各平面上の四つの分岐点を例へば (α_0,α_1) , (α_2,α_3) の如く二組に分け、線分 $\alpha_0\alpha_1$ と $\alpha_2\alpha_3$ とは相交らぬものとする.そこで両平面を夫々この二線分に沿うて截断し、甲平面を乙平面の真上に重ねて甲の截断線 $\alpha_0\alpha_1$ の両側を夫々乙の截断線 $\alpha_0\alpha_1$ の之と相反する側と癒着せしめる,即ち出来上つた癒着面は線分 $\alpha_0\alpha_1$ の所で交叉した形になるのである.截断線 $\alpha_2\alpha_3$ についても同様のことをする.斯くして出来た面が即ち R(z,s) に対する Riemann 面である.以下簡単のために此面を R 面と呼ぶことにする.



第4図

左図の点線に沿うて両平面を 横断すればその截り口は下の 如くである



第5図

R 面上に於て R(z,s) は一価であるが、併し通常の一価函数に関する理論を之に適用するためには更に次の規約を要する。即ち、R(z,s) の正則性や特異性について考へるときは之を直接に z の函数として考へずに次の (1), (2) の如き補助変数 t の函数として考へることにする。

(1) R 面の分岐点以外の一点 α に於ては、

$$\alpha + \infty$$
 なるときは $z - a = t$ と置き, $\alpha = \infty$ なるときは $\frac{1}{z} = t$ と置く.

(2) R面の分岐点 α に於ては、

$$\alpha = \infty$$
 なるときは $z - a = t^2$ と置き, $\alpha = \infty$ なるときは $\frac{1}{z} = t^2$ と置く.

斯くして R(z,s) を t の函数に直したときの t=0 に於ける性質を以て原函数の z=a の又は $z=\alpha$ に於ける性質であるとする.

例へば

$$s = \sqrt{(z - \alpha_0)(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)(z - \alpha_3)}$$

の $z = \alpha_0$ に於ける性質を見るために, (2) によつて $z - \alpha_0 = t^2$ と置けば

$$s = t\sqrt{(\alpha_0 - \alpha_1 + t^2)(\alpha_0 - \alpha_2 + t^2)(\alpha_0 - \alpha_3 + t^2)}$$

5. 楕円無理函数 15

となる. 故に s は分岐点 α_0 に於て正則であつて一位の零となるのである. 同様の理由で、 $\frac{1}{6}$ は α_0 に於て一位の極を有する.

斯様な規約の下に R(z,s) を R 面上の一価函数として考へると,之に対して Cauchy の定理が成立する,即ち R(z,s) が R 面上に於ける有限面分の周 C 及び其内部を通じて連続で且その内部に於て到る所正則ならば,

$$\int_{(C)} R(z,s) \, dz = 0.$$

次に C の内部に R(z,s) の極又は無限遠点を含む場合の積分を考へるために留数なるものを定義する. 即ち一点 a を中心として円 K を画き,K の周及び其内部には a 以外に函数 R(z,s) の極も無限遠点も存在せざるとき,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(K)} R(z,s) \, dz$$

なる値を称して点 a に於ける函数 R(z,s) の**留数**といふ,但しこゝに積分路は K を正の方向 (中心 a を左方に見る如き方向) に完全に一周するものとする,従つて若し a が分岐点ならば a の周りを 8 直角だけ回転するのである.

此定義と補助変数 t に関する規約とから直ちに次のことがいはれる.

一点に於ける函数 R(z,s) の留数は $R(z,s)\frac{dz}{dt}$ を t の函数と考えへたときの t=0 に 於ける留数に等しい.

例へばaを分岐点ならざる有限の一点とすれば、次の如き形の展開式が成立する.

$$R(z,s) = \dots + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots$$
$$= \dots + \frac{c_{-2}}{t^2} + \frac{c_{-1}}{t} + c_0 + c_1t + c_2t^2 + \dots,$$

こゝに c はすべて常数である. 故に R(z,s) の z=a に於ける留数は c_{-1} で,これ即ち $R(z,s)\frac{dz}{dt}$ の t=0 に於ける留数と同一である.又 a が有限なる分岐点ならば

$$R(z,s) = \dots + \frac{c_{-2}}{z-a} + \frac{c_{-1}}{(z-a)^{1/2}} + c_0 + c_1(z-a)^{\frac{1}{2}} + c_2(z-a) + \dots$$
$$= \dots + \frac{c_{-2}}{t^2} + \frac{c_{-1}}{t} + c_0 + c_1t + c_2t^2 + \dots,$$

であるが留数を求めるための積分路は点 a を二周することを考に入れると. R(z,s) の留数は $2c_{-2}$ なることを知る. 而して之は丁度 $R(z,s)\frac{dz}{dt}$ の t=0 に於ける留数に等しい. さて R(z,s) の極及び無限遠点は全部で有限箇数しかなく,その他の点では R(z,s) の留数は到る所で 0 である. 依つて今 R 面上に於てすべての極及び無限遠点を内外何れか一方の側にのみ有する様な単一閉曲線を書き,之を一周する積分を考へれば容易に

R(z,s) のすべての極及び無限遠点に於ける留数の和は 0 に等しい.

ことが判る. 従つてまた通常の数平面上に於て有理函数について証明されるのと全く同様の手続によつて次の定理を得る.

R(z,s) は、常数でない限り、R 面上に於て 0 及び ∞ なる値を同じ回数だけ取る. 従つてまた、任意の値をも同じ回数だけ取る. 故に若し常数ならざる R(z,s) が R 面上に於て到る所正則であるとすれば、 ∞ なる値をとる回数が零であるから従つて他の

如何なる値をとる回数も零といふことになつて結局何等の値をもとらないといふ不都 合を生ずる. 依つて

R 面上に於て到る所正則なる R(z,s) は常数に限る.

通常の数平面上に於て一価なる解析函数で極より他の特異点をもたぬものは有理函数に限る。これは函数論でよく知られたことであるが、R面上に於ても之に似た事実がある。即ち

R 面上に於て一価なる解析函数で極より他の特異点をもたぬものは R(z,s) に限る。 これから又直ちに次の定理を得る。

R面上に於て到る所正則なる一価解析函数は常数に限る.

これ即ち一価函数に関してよく知られた Liouville の定理の拡張である.

6. 楕円積分の多価性

次には楕円無理函数 R(z,s) の積分,即ち楕円積分の函数論的性質を少し調べて見よう.

R(z,s) は R 面上で一価であるけれども、之を積分して得る函数

$$F(z) = \int_{a}^{z} R(z,s) dz$$
 (a は常数)

は必ずしも R 面上で一価ではない.その原因の一つは R 面上にある R(z,s) の極又は無限遠点の中にその点に於ける留数の 0 ならざるものが一般には存在することである.例へば a から z に至る二つの積分路 C,C' が R 面上に於て一つの単一連結面分を囲んで居るとして,その内部に R(z,s) の留数の 0 ならざる点が唯一つあつて其留数を A とすれば.

$$\int_{(C)} R(z,s) dz = \int_{(C')} R(z,s) dz \pm 2\pi i A$$

となる、即ち F(z) の値は z のみでは定まらずに積分路にも関係するのである、故に F(z) は一価でない.

F(z) が多価になる第二の原因は R 面が複雑なる連結状態を有することにある.元来 Cauchy の積分定理は単一なる数平面の上で証明されたものであるが,R 面は単なる平面と違つて例へばその上の任意の単一閉曲線 L が必ずしも R 面を二つの部分に分けない等の性質があるため,R 面上では (仮りに R(z,s) のすべての点に於ける留数が零であつても) 必ずしも

$$\int_{(L)} R(z, s) \, dz = 0$$

ではない. 故に今 C_1, C_2 が丁度合せて斯様なLとなるものとすれば、一般には

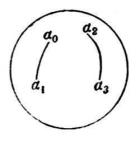
$$\int_{(C_1)} R(z, s) \, dz = \int_{(C_2)} R(z, s) \, dz$$

でない. これがまた F(z) のを多価ならしめる一因である. この第二の原因による多価性を更に詳しく調べるために先づ R 面の連結状態を精査する必要がある.

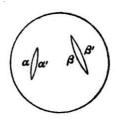
6. 楕円積分の多価性 17

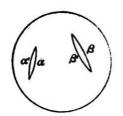
便宜上数平面の代りに数球面を用ゐることにすれば,R面の代りに第 6 図の如き面を得る.即ち二つの球面が内外に相重なり両者は二つの弧 $\widehat{\alpha_0\alpha_1}$ 及び $\widehat{\alpha_2\alpha_3}$ に第 6 図於て相交叉して居るのである.

今これらの交叉点に沿うて両球面の連絡を切り離し、内球を取り出して外球と並べて見れば第7図の様になる,但し図の α,α' 等は切れ目の両側がもと如何に連絡してゐたかを示すもので,同じ記号の縁辺がもと続いてゐたものである.



第6図





第7図

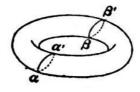
さて今吾々は面の連結状態のみを問題とするので、形や大さ等は如何やうに変じても差支ないのであるから、第7図の切れ目の口を開いて之を第8図の如き二箇の管状のものに直しても宜しい.





第8図

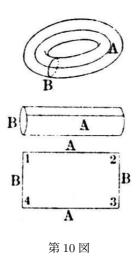
こゝに於て両管の口を夫々記号が合ふやうに接ぎ合せれば第9図の如き浮袋の様な 形の曲面を得る.



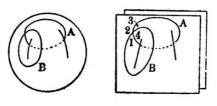
第9図

それはもとの R 面を一度切り離してまた前の通りに接ぎ合せたのであるから、連結状態に於てはもとと変りがない筈である。故に R 面の連結状態について考へる代りに第9 図について考へても同じことである。之を \overline{R} 面と呼ぶことにする。

今R面をBなる線に沿うて切断し、之を真直に伸せば円柱になる。この円柱を更にAなる線に沿うて切り開いて、之を平らに拡げれば一枚の矩形を得る、これは明かに単一連結の面分である。



さて R 面は斯くの如く A,B 二線に沿うて截れば単一連結の面分になるのであるから,之と同じ連結状態を有する R 面に於ても同様のことが成立しなければならぬ.然らば \overline{R} 面上に於ける A,B に対応するものは R 面上の如何なる線であるか.それは前の第 9 図から順次に第 6 図に溯つて考へれば容易に判る,即ち第 11 図の如き曲線である.



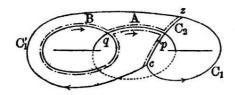
第11図

故に R 面を斯様な A,B に沿うて截れば,たとへ伸したり展げたりしなくも其儘で,単一連結になつて居る筈である.これは直観的には一寸見透しが困難かも知れぬが,拡げたときに A,B の両岸が矩形の四辺になることを考へると丁度図の 1,2,3,4 と印してある所が矩形の四隅に当ることが判る.かくの如く切断線を入れて単一連結に直された面を R' 面と呼ぶことにする.

R' 面は単一連結で、そこでは Cauchy の積分定理が成立するから、F(z) が多価になる第二の原因は除かれたことになる.故に積分路を R' 面内にある様にすれば(換言すれば積分路が A 又は B を横切らぬ様にすれば)F(z) は第一の原因即ち R(z,s) の 0 ならざる留数の存在によつてのみ多価となるのである.特にもし R(z,s) の留数が到る所 0 ならば F(z) のは R' に於ては一価函数となる.

併し元来 A,B なる切断線は吾々が便宜上設けたもので、最初に F(z) なる積分を考へたときには斯様な制限はなくして積分路は R 面 (R' 面ではない) 内を自由に走り得るものと考へたのである.そこで次に起る問題は,a から z に至る積分 F(z) の値を考るのに,積分路を R' 面内に取つたときと R' 面の外に出る路(即ち A 又は B と交る路)を取つたときとで如何なる差違があるかといふことである.

6. 楕円積分の多価性 19



第12図

今 A,B を第 12 図の如くにとり,矢の如き方向を各その正の方向と定める,即ち B は A の正の方向を左から右に横切るものとし,その交点を q とする.なほ簡単のため に R(z,s) の留数は到る所 0 であると仮定し,第一の原因から生する多価性は一切考へ ないことにする.さてそこで例へば c から z に至る R' 内の路 C_1 と,一度 A を(点 p に於て)右から左に横切る路 C_2 とに対する F(z) の値を夫々 F_1,F_2 と名づける.

仮定により R' 内では F(z) のは一価であるから,c と z とを R' 内で結ぶ二つの路 C_1, C_1' に沿うての F(z) の値は同一である.(球面上で考へれば c と z とを固定して置いて, C_1 を ∞ を通して変形することによつて C_1' の位置に来らしめ得ることが理解される.) その C_1' を更に変形して R' 面の限界たる A,B に密着する位置(図に鎖線 $-\cdot-\cdot-$ で示す)まで来らしめたとすれば,

$$F_2 = \int_{(C_2)} = \int_c^p + \int_p^z,$$

$$F_1 = \int_{(C_1)} = \int_{(C_1')} = \int_c^p + \int_p^q + \int_{(B)} + \int_q^p + \int_p^z,$$

但しこゝといふのは点qからBを正の方向に一周する積分の意味である,又 \int_p^q と \int_q^p とは同じA沿うて夫夫相反する向き積分するのであるから互に打消す事になる.依つて

$$F_1 = \int_c^p + \int_{(B)} + \int_q^z = F_2 + \int_{(B)},$$

従つて

$$F_2 = F_1 - \int_{(B)}$$

である。即ち積分路が A を右から左に横切るときは横切らぬときに較べて積分の値が $\int_{(B)}$ だけ減ずることになる。このことは上の計算で明かな通り A を横切る点 p の位置 には関係しないのである。なほ C_1 や C_2 を種々の形に書いて上述の理を繰り返して見るとよい練習になるが茲には略す。若し又 A 左から右に横切るとき積分の値は $\int_{(B)}$ だけ増すことは容易に証明される。又 A の代りに B を一回横切るときの積分を F_3 とすれば、

$$F_3 = F_1 \pm \int_{(-A)}$$

である,但し (-A) とは A を負の方向に一周する積分路を示し,又積分の前の複号は B を横切る向きが左から右なるとき +,右から左なるとき - をとるものとする.これらの証明はすべて読者に委する.

A 横切るときの $\int_{(B)}$ なる数 A に関する F(z) の**週期母数** (Periodicity-modulus) といひ,之を P(A) で表す.同様に $\int_{(-A)}$ を B に関する F(z) の週期母数といひ之を P(B) で表す.即ち

$$P(A) = \int_{(B)}, \quad P(B) = \int_{(-A)} = -\int_{(A)}$$

一般に積分路が R 面上を自由に横行し其間 A を左から右に m_1 回,右から左に m_2 回横切り.又 B を左から右に n_1 回,右から左に n_2 回横切るとすれば,その積分の値は

$$F_1 + (m_1 - m_2)P(A) + (n_1 - n_2)P(B)$$

である. 以上は簡単のために R(z,s) の留数をすべて 0 と考へたのであるが,もし一般に 0 ならざる留数 c_1 , c_2 , \cdots があつて,積分路がそれらの点を正の方向に夫々 l_1, l_2, \cdots 周するとすれば,積分の値に更に

$$2\pi i(l_1c_1 + l_2c_2 + \cdots)$$

が加はることになる.

以上を総括すれば次の結果を得る.

精円積分 $\int_c^z R(z,s) \, dz$ は、z を R 面上の変点とすれば、z の多価函数であつて、その一つの値を u とすれば、最一般なる値は次の形によつて与へられる、

$$\int_{c}^{z} R(z,s) dz = u + mP(A) + nP(B) + 2\pi i (l_1 c_1 + l_2 c_2 + \cdots),$$

こゝにP(A), P(B) 及び c_1, c_2, \cdots は夫週期母数及び留数なる常数,又 m, n, l_1, l_2, \cdots は整数である.

7. 楕円積分の分類

R 面上の任意の一点に於て (分岐点でも、無限遠点でも) 第 5 節に説明した補助変数 t を用ゐれば、R(z,s)dz は一般に次の如き形に展開される、

$$R(z,s)dz = \left(\dots + \frac{c_{-2}}{t^2} + \frac{c_{-1}}{t} + c_0 + c_1t + c_2t^2 + \dots\right)dt,$$

c なる係数はすべて常数で、また負冪の項数は必ず有限である.

若しR 面上のすべての点に於て常に $c_{-1}=0$,即ち到る所でR(z,s) の留数が0 ならば,積分函数F(z) は留数のための原因で多価になることがないから,截断線AB を設けたR' 面に於て一価になる.之に反して $c_{-1} \neq 0$ なる点が一つでもあれば,F(z) はR' 面に於ても一価ではなく,

$$F(z) = \int R(z, s) dz$$

= \cdots - \frac{c_{-2}}{t} + c_{-1} \log t + c_0 t + \frac{c_1}{2} t^2 + \cdots

となつて対数的の特異点を有する.

 $c_{-1}=0$ なる場合を更に二つに分けることが出来る.即ち第一に c_{-1} のみならず c_{-2},c_{-3},\cdots 等負の添数の c が到る所に於てすべて 0 なるときは,F(z) のは R' に於

7. 楕円積分の分類 21

て一価なるのみならず到る所で正則である。第二に何れかの点に於て c_{-2}, c_{-3}, \cdots の中に少くも一つ 0 ならざるものがあるときは、F(z) のは其点に於て極を有する。

以上の結果により、吾々は楕円積分を次の三種に分類する.

第一種. R' 面に於て一価で, 且到る所正則なるもの.

第二種. R' 面に於て一価で、極を有するが其他の特異点を有せざるもの.

(以上二種は R' 面では一価であるが R 面では勿論一般に多価で、週期母数の整数倍だけの差を有する種々の値をとるのである。又極を有する場合には勿論有限個数だけの極を有するのである。)

第三種. R' 面に於ても一価でなく, 且対数的特異点を有するもの.

以上はF(z)について起り得べきすべての場合を盡したのであるが、実は楕円積分のみならず一般なる代数函数の積分を考へても結局之と同様なる三種に分類することが出来る.

さて上記の三種は楕円積分の函数論的性質によつて分類したのであるが、翻つて第3節に述べた三種の標準形を此新らしい立脚地から調べて見ると丁度三つの種類が一つ一つ相対応してゐることが判る.次に之を証明する.

先づ第一種の標準形

$$F_1(z) = \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

を取つて見ると、 R面上の何れの点に於ても

$$\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = (c_0 + c_1t + c_2t^2 + \cdots)dt$$

なる形の展開式を得るから、R(z) は第一種の楕円積分である. 次に

$$F_2(z) = \int \sqrt{\frac{1 - k^2 z^2}{1 - z^2}} \, dz$$

について考へると、R 面上の有限なる一点に於ては常に F(z) の場合と同様あるが、無限遠点に於ては $z=\frac{1}{t}$ であるから

$$\sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}}\,dz = \frac{1}{t^2}(c_0 + c_2t^2 + \cdots)dt$$

となる. 故に $F_2(z)$ は点 ∞ に於て一位の極を有する第二種の楕円積分である.

最後に

$$F_3(z) = \int \frac{dz}{(z^2 - a^2)\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}$$

に於ては, $z=\pm a$ 以外の点では (無限遠点でも) $F_1(z)$ の場合と同様であるが, $z=\pm a$ のなる点では

$$\frac{dz}{(z^2 - a^2)\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} = \frac{1}{t}(c_0 + c_1 t + \cdots)dt$$

となつて此所に対数的特異点を有する. 故に $F_3(z)$ は第三種の楕円積分である.

前に標準形を三種に分けたのは単に機械的計算の外形によつて分類したのであつたが、此所に至つてその分類は更に深い函数論的基礎を有することが知られたのである。

8. 第一種楕円積分

三種の楕円積分の中で最簡単で且重要なる第一種の積分に関して少し研究して見よう.

 $\varphi(z)$ を z に関する四次式又は三次式とするとき,

$$\int \frac{dz}{s} \quad (s = \sqrt{\varphi(z)})$$

が第一種であることは前節に於て $F_1(z)$ について述べたと全く同様に証明される. こっては一歩進んで其逆を証明する,即ち

第一種楕円積分は
$$\int rac{dz}{s}$$
より他にない

といふことを主張するのである.

今 $\int R(z,s)\,dz$ を一つの楕円積分とし、先づ最初は $s^2=\varphi(z)$ を四次式と考へる。補助変数 t の定め方により、R 面上の分岐点ならざる有限の一点 a に於ては

$$z-a=t$$
, 従つて $dz=dt$,

分岐点 α に於ては

$$z - \alpha = t$$
, 従つて $dz = 2tdt$,

又無限遠点は此場合には分岐点でないから其所では

$$z-\alpha=\frac{1}{t},\quad 従つて \quad dz=-\frac{dt}{t^2},$$

となる。故に R(z,s)dz を t の冪に従つて展開したとき負冪の項がないとすれば(これ 即ち $\int R(z,s)\,dz$ が第一種なるための必要且十分なる条件である), R(z,s) は

z = a に於ては正則,

 $z = \alpha$ に於ては一位の極を有し得,

 $z=\infty$ に於ては少くも二位の零点を有する

ものでなければならぬ. 然るに今s 自身を考へて見ると、

z=a に於て正則,

 $z = \alpha$ に於て一位の零点を有し,

 $z = \infty$ に於て二位の極を有する.

故に $s \cdot R(z,s)$ なるものを作れば之は R 面上に於て到る所正則である,従つて第 5 節に証明した如く之は常数でなければならぬ.その常数を C とすれば

$$R(z,s) = \frac{C}{s} \tag{1}$$

となる.

 $\varphi(z)$ が三次式なる場合には点 ∞ が分岐点になるから其所では

$$z=rac{1}{t^2}$$
, 従つて $dz=-rac{2dt}{t^3}$

となる点だけが前と相違するが、大体の論法は前と同様で矢張り (1) なる結果を得る. 依つて結局第一種の楕円積分なるものは

$$C\int \frac{dz}{s}$$

より他には存在しないことが判る. C は s の中に含ませることが出来るから、此結果は、 $\int \frac{dz}{s}$ といつて宜いのである. 次には序に

zとsとを一つの共通な媒介変数の有理函数として表すことは不可能である

ことを証明する $\varphi(z)$ が z の一次式又は二次式なるときには z と $\sqrt{\varphi(z)}$ とが一つの共通な媒介変数の有理函数として表されることは積分学でよく知られた事実であるが, $\varphi(z)$ が三次又は四次なるときにはそれが出来ないのである.

証明は帰謬法で簡単に出来る。即ち、もし斯様な媒介変数が存在するならば、それを用ゐて第一種の楕円積分 $\int \frac{dz}{s}$ を書き直せば之は有理函数の積分となる。然るに元来第一種であるから此積分は到る所で正則でなければならぬ。さて有理函数の積分はすべて既知の初等函数であるが、その中で到る所正則なるものといへば常数より他にない。然らば第一種楕円積分はすべて常数であるか、そんなことはない。之に依つて見ると前記の如き媒介変数が存在するといふことは有り得ない。

故に楕円積分 $\int R(z,s) dz$ 於て z に新らしい変数の有理函数を代入して之を有理函数の積分に変形することは不可能なのである.但し「有理」といふ条件を除いて,z と s とを一つの共通な媒介変数の一価解析函数として表すことならば出来る,それには後に述べる楕円函数を使用すれば宜いのである.

9. 第一種楕円積分の数値計算

第一種楕円積分の標準形

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

について其数値の計算法を述べる.

第 4 節に述べた如く実積分の場合には常に 0 < k < 1 とすることが出来るから後に (第 21 節に) 説明する特別の計算法も適用されるが,こゝでは一般に k を任意の複素数 と考へることにする.又この積分の上下端も一般には任意の複素数の筈であるが,今 仮りに之を a,b とすれば、常に

$$\int_{a}^{b} = \int_{a}^{1} - \int_{b}^{1}$$

の如くに書き直すことが出来るから,吾々は上端を 1 と定め,下端を任意の数 z として,積分

$$u = \int_{z}^{1} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^{2})(1-k^{2}z^{2})}} \tag{1}$$

の値を計算することを考へれば宜い.

先づ最初に

$$|k| < 1 \quad \exists \quad |z| \le \frac{1}{|\sqrt{k}|} \tag{2}$$

なる場合について論ずる. 然らざる場合でも次節に述べる如く容易に此場合に直し得るのである.

さて (2) が満足されれば勿論 $|k^2z^2|$ < 1 であるから,次の展開式が成立する.

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2z^2}} = 1 + \frac{1}{2}k^2z^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4z^4 + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot \dots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \dots \cdot 2n}k^{2n}z^{2n} + \cdots$$

冪級数の性質としてよく知られる通り此展開式は収斂円よりも小なる円

$$|z| \le \frac{1}{|\sqrt{k}|} < \frac{1}{|k|}$$

に於て一様収斂である. 依つて之を (1) に代入して項別積分を行へば、次の結果を得る.

$$u = \int_{z}^{1} \frac{dz}{\sqrt{1 - z^{2}}} + \frac{1}{2}k^{2} \int_{z}^{1} \frac{dz}{\sqrt{1 - z^{2}}} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}k^{4} \int_{z}^{1} \frac{dz}{\sqrt{1 - z^{2}}} + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n - 1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}k^{2n} \int_{z}^{1} \frac{dz}{\sqrt{1 - z^{2}}} + \cdots$$

この右辺にある積分を処理すると次の如くになる(4).

$$\begin{split} \int_{z}^{1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^{2}}} &= \frac{1}{i} \log{(z+i\sqrt{1-z^{2}})}, \\ \int_{z}^{1} \frac{z^{2}dz}{\sqrt{1-z^{2}}} &= \frac{1}{2} \int_{z}^{1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^{2}}} + \frac{z\sqrt{1-z^{2}}}{2}, \\ \int_{z}^{1} \frac{z^{4}dz}{\sqrt{1-z^{2}}} &= \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \int_{z}^{1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^{2}}} + \frac{z\sqrt{1-z^{2}}}{4} \left(z^{2} + \frac{3}{2}\right), \end{split}$$

一般に

$$\int_{z}^{1} \frac{z^{2n}dz}{\sqrt{1-z^{2}}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \int_{z}^{1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^{2}}} + \frac{z\sqrt{1-z^{2}}}{2n} \left\{ z^{2n-2} + \frac{2n-1}{2n-2} + \frac{(2n-1)(2n-3)}{(2n-2)(2n-4)} z^{2n-6} + \dots + \frac{(2n-1) \cdot \dots \cdot 5 \cdot 3}{2n \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2} \right\}$$

であるから、之をすべて代入して整頓すると、

$$u = \frac{1}{i} L_0 \log (z + i\sqrt{1 - z^2})$$
 (3)

$$+\sqrt{1-z^2}\left(L_1z+\frac{2}{3}L_3z^3+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}L_5z^5+\cdots\right)$$
 (4)

 $[\]frac{(4)}{z}=\sin heta$ と置き積分学でよく知られた漸化式を用ゐるとよい.

となる. こゝに

$$L_{0} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2} k^{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^{2} k^{4} + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^{2} k^{6} + \cdots,$$

$$L_{1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2} k^{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^{2} k^{4} + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^{2} k^{6} + \cdots,$$

$$L_{3} = \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^{2} k^{4} + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^{2} k^{6} + \cdots,$$

$$L_{5} = \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^{2} k^{6} + \cdots,$$

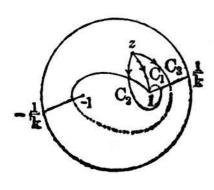
仮定により |k|<1 であるから此等の級数で L が計算され,従つて u が求められる.ところで (3) の級数には $\sqrt{1-z^2}$ が含まれてゐて此根号の符号の取り方を変へれば丁度 u の符号が変る.又 (3) は \log の項を含むから対数函数の多価性により (積分路のとり方によつて)u の値は $2\pi L_0$ の整数倍だけ変り得る.故に結局 (3) によつて与へられる値の一つを u_0 とすれば,其全部は

$$2n\pi L_0 \pm u_0 \qquad (n は整数) \tag{5}$$

で表される. 併し之は積分 (1) の取るすべての値ではない. 既に知れる通り第一種楕円積分に於ては、対数的特異点はないが、週期母数 P(A), P(B) なるものがあつて、其積分の一つの値を u_0 とすれば、全部の値は

$$u_0 + mP(A) + nP(B) \qquad (m, n \text{ は整数}) \tag{6}$$

となる筈である。(5) と (6) の差違について研究しなければならぬ。先づ (5) に於ては u_0 の前に正負の複号が附いてゐるが,(6) には複号がない。之は何に原因するかとい ふと,第 6 節の研究では積分の一端 z を R 面上の一点と考へて居るので,単に z の 数値のみならず R 面を形成してゐる何れの平面上にあるかをも考に入れて居るのであ る。之に反して本節の (1) なる積分では其下端 z は其数値のみを考へてゐるのである から,若し之を R 面の上に持ち来して見るならば同じ z でも一方の平面上の z とも他 の平面上の z とも見られる。その何れと見るかに従つて (1) は丁度符号を変ずること になる,之が (5) に複号の現れる理由である。



第13図

次に注意すべきことは,(3) は冪級数であるからその収斂円の内部だけでu の値を表してゐることである.此収斂円の半径は $\frac{1}{|k|}$ で,(2) なるにより,1 よりも大であるから,今R 面を此収斂図の部分だけ切り抜いて取ると丁度図の様に二枚の円が二つの線分 $(1,\frac{1}{k})$ 及び $(-1,-\frac{1}{k})$ に於て相交叉した形の面を得る.此面の上で $\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$ は一価であるが,積分u は(積分路を此面内に限つても)一価ではない.例へば図の如きz から1 に至る三つの積分路 C_1,C_2,C_3 を考へ, C_1 に沿うて

のものも矢張り u_0 である,何となれば C_2 は此面内で連続的に変形して容易に C_1 と一致せしめ得るからである.之に反して C_3 は之を連続的変形によつて全部 C_1 と一致

させることは出来ない,二つの分岐点 1,-1 を一周する部分の長さを出来るだけ緊縮した所で結局

$$\int_{(C_2)} = \int_{(C_1)} + \int_1^{-1} \frac{dz}{-\sqrt{}} + \int_{-1}^1 \frac{dz}{\sqrt{}}$$

となるに過ぎぬ,但し右辺の被積分函数の根号の前の符号は積分路が上方の平面にあるときに正,下方の平面にあるとき負としたのである。今簡単のために

$$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = K$$

と置けば,

$$\int_{1}^{-1} \frac{dz}{-\sqrt{}} = \int_{-1}^{1} \frac{dz}{\sqrt{}} = 2K.$$

故に上の関係は次の様になる.

$$\int_{(C_3)} = u_0 + 4K.$$

積分路の取り方はなほ種々考へ得るが、要するに-1なる分岐点を一周する毎に積分の値が4Kだけ増減するので、最一般なる値は

$$u_0 + 4nK$$
 (n は整数)

で表されることになる。もしzの同じ数値の点が此 Riemann 面の他の一葉の上にもあることを考に入れれば、(3) によつて与へられる $\mathbf u$ のすべての値は

$$4\pi K \pm u_0$$
 (n は整数)

となつて、之は正しく (5) と一致すべき筈である、実際 K を一無限級数で表して見ると丁度 $\frac{\pi}{2}L_0$ となることは容易に計算されるから、上式が (5) と一致することは確かである。

第6節の記号を踏襲すれば

$$P(B) = \int_{(-A)}^{-1} dz = \int_{1}^{1} \frac{dz}{-\sqrt{}} = \int_{-1}^{1} \frac{dz}{\sqrt{}} = -4K.$$

故に (5) で与へられる u の値は (6) の中の P(A) の項を欠いたものである.

何故に P(A) の項を欠いて P(B) の項のみ保存された式が出来たかといふと、曲線 A は二つの線分 $\left(1,\frac{1}{k}\right)$, $\left(-1,-\frac{1}{k}\right)$ と交つてさへ居れば如何に大きく拡がつて差支ないから、上記の切り抜かれた円の外に出てしまふことが出来るが(二点 $\pm \frac{1}{k}$ の所だけ僅か円周にかゝる),B はどうしても 1 と -1 との間を通らなければならぬから全く円外に出るわけにはゆかぬ.従つて此二重円内で u なる積分を考へるとき,その積分路が A は全然横切らぬことを得るが,B を横切るものは必す存在する.依つて上記の如き結果になるのである.

若し (3) なる展開式の中心を原点から次第に移動し $\frac{1}{k}$ 又は $\frac{1}{k}$ の周りを一周する路を傳はりながら解析接続をなせば,つひに P(A) の影響が現れて一周の後また中心が原点に来たとき此級数の値は前とは $\pm P(A)$ だけの差違を有することになる筈である.

10. 第一種楕円積分の数値計算(続き)

前節の(2)なる条件が満足されぬ場合でも之を適当に変形して此条件を満足するや うになし得ることを次に証明する.

一般に任意の第一種楕円積分に第2節に述べた変形を行へば常に

$$c_1 \int \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta(1-\zeta)(1-\lambda\zeta)}} \quad (c_1 は常数) \tag{1}$$

なる形にすることが出来る.

第2節で細かく論じた通り、此際変形式の取り方を適当に選んで(1)に於ける λ をして基本領域即ち数平面上の

$$x^2 + y^2 \le 1, \quad x \ge \frac{1}{2}$$

なる弓形内に入らしめたものと考へる.

こゝに於て

$$\zeta = \xi^2$$

と置いて (1) を更に変形すれば

$$c_2 \int \frac{d\xi}{\sqrt{\xi(1-\xi^2)(1-\lambda\xi^2)}} \quad (c_2 は常数)$$
 (2)

となる. ζ の一つの値に ξ の二つの値が対応するが、今その中で

$$\Re(\xi\sqrt[4]{\lambda}) \ge 0 \tag{3}$$

なる方の値をとることと定める、但し $\sqrt[4]{\lambda}$ の値は偏角が零又は最小正角なるものをとることにする. 次には

$$\frac{1 - \sqrt[4]{\lambda}}{1 + \sqrt[4]{\lambda}} = \sqrt{h}$$

と置いて、(2) に更に次の変換を行ふ、

$$\sqrt{h}\eta = \frac{1 - \sqrt[4]{\lambda}\xi}{1 + \sqrt[4]{\lambda}\xi}.$$
 (4)

この変換の結果は実際に計算して見れば次の通りである.

$$c_3 \int \frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)(1-h^2\eta^2)}}$$
 (c_3 は常数) (5)

此(5)なる積分は丁度前節の(2)なる条件を満足して居ることが証明される.

先づ (3) によつて、 $\sqrt[4]{\lambda}$ を実部と虚部とに分けて

$$\sqrt[4]{\lambda}\xi = X + Yi$$
 とすれば $X \ge 0$.

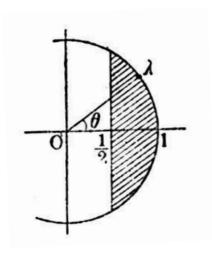
故に (4) により

$$|\sqrt{h\eta}| = \left|\frac{1 - X - Yi}{1 + X + Yi}\right| = \sqrt{\frac{(1 - X)^2 + Y^2}{(1 + X)^2 + Y^2}} \le 1.$$

これ即ち前節 (2) の一条件である. 次には |h|<1 を証明しなければならぬが、それには

$$|h| = \frac{1 - \sqrt[4]{\lambda}}{1 + \sqrt[4]{\lambda}} < 1$$

なることをいへばよい.



第14図

仮定により λ は基本領域にある,而して \sqrt{h} は此領域で λ の正則函数であるから,一般函数論でよく知られる通り \sqrt{h} は基本領域の周囲の上で其最大値をとる筈である.故に今この弓形の周上の何所でも $\sqrt{h} < 1$ なることをいへば,それで吾々の目的は達せられるのである.

先づ λ が弓形の弧上にありとして,

$$\lambda = \cos \theta + i \sin \theta, \quad \sqrt[4]{\lambda} = \cos \frac{\theta}{4} + i \sin \frac{\theta}{4}$$

$$-\frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{\pi}{3}$$

と置けば

$$\sqrt{h} = \sqrt{\frac{\left(\cos 1 - \frac{\theta}{4}\right)^2 + \sin^2 \frac{\theta}{4}}{\left(\cos 1 + \frac{\theta}{4}\right)^2 + \sin^2 \frac{\theta}{4}}}$$
$$= \left|\tan \frac{\theta}{8}\right| \le \tan \frac{\pi}{24} < 1.$$

次に λ が弓形の弦上にありとして、

$$\lambda = \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \tan \theta, \quad -\frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{\pi}{3}$$

と置く. θ の符号を変すれば λ は共軛なる数に変じ、従つて \sqrt{h} も亦それの共軛数になる. 併し今は其の絶対値だけを考へるのであるから共軛数でも同じことである、依つて $0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}$ と考へることにする.

此範囲に於て $|\sqrt{h}|$ が θ の増加函数であることを次に証明する. それには

$$\frac{d}{d\theta}|\sqrt{h}| > 0$$

をいへばよいが、一般に

$$|\sqrt{h}| = e^{\Re(\log\sqrt{h})}$$

であるから, 上の不等式の代りに

$$\frac{d}{d\theta}\Re(\log\sqrt{h}) = \Re\left(\frac{d}{d\theta}\log\sqrt{h}\right) > 0$$

を証明すればよい.

さて

$$\log \sqrt{h} = \log(1 - \lambda^{\frac{1}{4}}) - \log(1 + \lambda^{\frac{1}{4}})$$

であるから,

$$\frac{d}{d\theta} \log \sqrt{h} = -\frac{1}{4} \left(\frac{\lambda^{-\frac{s}{4}}}{1 - \lambda^{\frac{1}{4}}} + \frac{\lambda^{-\frac{s}{4}}}{1 + \lambda^{\frac{1}{4}}} \right) \frac{d\lambda}{d\theta}$$
$$= -\frac{1}{2} \frac{\lambda^{-\frac{s}{4}}}{1 - \lambda^{\frac{1}{2}}} \frac{d\lambda}{d\theta}$$
$$= -\frac{1}{2} \frac{\lambda^{-\frac{1}{4}} + \lambda^{-\frac{s}{4}}}{1 - \lambda} \frac{d\lambda}{d\theta}.$$

然るに

$$\frac{d\lambda}{d\theta} = \frac{1}{2}\sec^2\theta = \frac{i}{2}(1 + \tan^2\theta) = \frac{i}{2}\left\{1 + \left(\frac{2\lambda - 1}{i}\right)^2\right\}$$
$$= 2i\lambda(1 - \lambda).$$

故に

$$\frac{d}{d\theta}\log\sqrt{h} = -\frac{1}{2}\frac{\lambda^{-\frac{1}{4}} + \lambda^{-\frac{s}{4}}}{1 - \lambda}2i\lambda(1 - \lambda)$$
$$= -i(\lambda^{\frac{s}{4}} + \lambda^{\frac{1}{4}}).$$

さて

$$\lambda = \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \tan \theta = \frac{\cos \theta + i \sin \theta}{2 \cos \theta}$$

であるから,

$$\lambda^{\frac{1}{4}} = \frac{\cos\frac{\theta}{4} + i\sin\frac{\theta}{4}}{\sqrt[4]{2}\cos\theta}, \quad \lambda^{\frac{s}{4}} = \frac{\cos\frac{3\theta}{4} + i\sin\frac{3\theta}{4}}{\sqrt[4]{2}(\cos\theta)^3}$$

依つて

$$\Re\left(\frac{d}{d\theta}\log\sqrt{h}\right) = \frac{\sin\frac{\theta}{4}}{\sqrt[4]{2\cos\theta}} + \frac{\sin\frac{3\theta}{4}}{\sqrt[4]{2(\cos\theta)^3}}$$

此結果が丁度 0 に等しいのは $\theta=0$ のときだけであるから, $|\sqrt{h}|$ は $0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}$ に於て θ の増加函数で,従つて $\theta=\frac{\pi}{3}$ のときに最大値をとる,その値は即ち前に得た $\tan\frac{\pi}{24}$ に他ならぬ,故に勿論 1 より小である.

之によつて、(5) なる積分は前節の方法でその数値が計算されることが判る.

第二章 Jacobi の楕円函数

11. 第一種楕円積分の逆函数

 $\varphi(z)$ が等根を有せざる三次式又は四次式なるとき、第一種楕円積分

$$u = \int^{z} \frac{dz}{\sqrt{\varphi(z)}} \tag{1}$$

はzの多価函数で、その一つの値を u_0 とすれば一般なる値は

$$u_0 + mP(A) + nP(B)$$
 及び $Q - u_0 + mP(A) + nP(B)$ $(m, n$ は整数)

で与へられる, P(A), P(B) は週期母数, Q は一つの常数である. 扨之から吾々が考へようとするのは其逆函数で即ち z を u の函数として考察せんとするのである. 之を仮りに

$$z = f(u)$$

と名づける.

先づ f(u) が u の一価函数なることを証明すべきであるが、それは便宜上第六章に譲ることとする.

次に f'(u) を考へて見ると

$$f'(u) = \frac{dz}{du} = \sqrt{\varphi(z)} \tag{2}$$

であるから,z が有限なるときは f(u) は常に正則である.z が無限大となるのは即ち $f(u)=\infty$ となることで,f(u) が極を有することに他ならぬ.又 (2) では勿論 u は有限と考へて居るのであるから, $u=\infty$ に於ける f(u) の状態はこれでは判らぬのである.故に

f(u) は $u=\infty$ を除いて到るところ有理型である.

次に特筆すべき f(u) の性質はその週期性である.一般に或る函数 F(u) に於て零ならざる一定の常数 ω について

$$F(u + \omega) = F(u)$$

なる関係がuの任意の値について成立するとき、此函数を**週期函数**といひ、 ω をその 週期といる、今考へる函数 f(u) に於ては

$$mP(A) + nP(B)$$
 $(m, n$ は任意の整数)

なる形の数はすべて週期である.何となれば u に上記の数を加へたものは矢張唯の u と同じ z の値に対応する.即ち

$$f\{u + mP(A) + nP(B)\} = f(u)$$

だからである. 故に

f(u) は週期函数である.

12. 週期函数

週期性の話が出た序に、一般に一価解析函数で週期的なるものについて其重要な二三の性質を述べて置く。本節でいふ函数 f(u) のは必ずしも楕円積分の逆函数ではなく、任意の一価解析週期函数である。

定理 1. f(u) が ω なる週期有するとき, ω の整数倍も亦 f(u) の週期である.

これは明白である、何となれば仮定により

$$f(u+\omega) = f(u),$$

従つで

$$f(u+2\omega) = f(\overline{u+\omega}+\omega) = f(u+\omega) = f(u).$$

次第に斯くの如くすればよい (数学的帰納法). こ > でいる整数倍は勿論負の場合をも含む、零倍も含めても宜い. 但し0を週期といることにすれば総べての函数は皆週期的といることになるから、週期函数を定義するときは0なる週期は排斥しなければならぬが、今後週期に関する諸定理を述べるときには0をも一つの週期とする方が便利である.

定理 2. f(u) が ω_1 及び ω_2 なる週期を有するときは、

$$m_1\omega_1 + m_2\omega_2$$
 $(m_1, m_2$ は任意の整数)

も亦 f(u) の週期である.

 $m_1\omega_1$ 及び $m_2\omega_2$ が週期なることは定理 1 から出る、そこで

$$f(u + m_2 \omega_2) = f(u)$$

に於てuの代りに $u + m_1\omega_1$ を入れれば

$$f(u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2) = f(u + m_1\omega_1) = f(u).$$

依つて本定理を得る.

同理により、若し f(u) が $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \cdots$ なる週期を有するときは、それらの整数倍の和 $m_1\omega_1+m_2\omega_2+m_3\omega_3+\cdots$ も亦 f(u) の週期なることが証明される.

以上の定理によって明かなる如く,一つの週期函数は無数に多くの週期を有するものである.数平面上に於て此等の週期を表す点を名づけて週期点といふ.

例へば $\sin u$ なる函数についていへば実軸上の量 $u=n\pi(n$ は整数) なる点が週期点である.

定理 3. f(u) が常数でなければ、そのすべての週期点の集合は無限遠点にのみ集積する.

12. 週期函数 33

先づ有限の点には集積しないことを証明しよう.仮りに有限の一点 a に集積すると 考へれば、任意の正数 ϵ に対して

$$|\omega_1 - a| < \frac{\epsilon}{2}, \quad |\omega_2 - a| < \frac{\epsilon}{2}$$

なる如き週期 ω_1, ω_2 が必ず存在する. 然すれば

$$|\omega_1 - \omega_2| < \epsilon$$

で、 $c > lc \omega_1 - \omega_2$ はまた一つの週期であるから、 ϵ を十分小さくとることによつて結局絶対値が何程でも小さい週期が存在することになる.

そこで今 f(u) が正則なる任意の閉面分 G をとつて、その内部の一点を u_0 とし、又前述の理によつて絶対値が次第に限りなく小さくなる(例へば逐次にその前のものの半分以下になるが如き)無数に多くの週期 ω', ω'', \dots をとれば、

$$f(u_0) = f(u_0 + \omega') = f(u_0 + \omega'') = \cdots$$

なる関係が成立し、こゝに $u_0 + \omega', u_0 + \omega'', \dots$ をすべて G 内にある様にすることが出来る. 上式の各辺の値を c とすれば、函数論に於ける一致の定理により恒等的に f(u) = c 即ち常数でなければならぬ. 故に常数ならざる f(u) の週期点は有限なる集積点を有し得ないことが判る.

しかし週期点は数平面上に無数に多くあるから何所かに少くも一つ集積点をもたなければならぬ. 然るに有限の点は集積点たり得ないことが上に証明されたのであるから、是非とも無限遠点が集積点でなければならぬ.

注意 定理 3 では f(u) の一価函数なることが重要な仮定である,もし一価でなければ $f(u_0), f(u_0 + \omega'), \cdots$ 等が必ずしも f(u) の同一分枝に属せず,従つて f(u) = c なる 結論が得られない.

扨今函数 f(u) のすべての週期点を数平面上に印したとし、その中の原点以外の一点を ω とし、 ω と原点とを過る直線を引けば、その上には 0 及び ω 以外の週期点が無数に多く載つて居る(例へば $2\omega,3\omega,\cdots$ 等)しかし定理 3 により、それらの点は有限の所には集積しない筈であるから、その中で原点に最近い点といふのが無ければならぬ、それは其直線上の原点の両側に等距離の位置に一つづゝ、合せて二つある筈である、今その一つを ω_0 とする、

 ω_0 の整数倍に当る点は皆上記の直線上にあること勿論であるが,この直線上には其他に週期点のないことも容易に証明される.何となれば,もし ω_0 の整数倍以外に此直線上に Ω なる週期点があつたとすれば,之に対して

$$\Omega = n\omega_0 + \omega', \quad 0 < |\omega'| < |\omega_0|$$

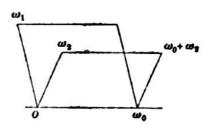
なる如き整数 n 及び剰余 ω' を決定することが出来る.この ω' は矢張り同じ直線上にあつて, Ω 及び $n\omega_0$ が何れも週期であるから, ω' も亦週期である.然らば該直線上に ω_0 よりも原点に近い週期点 ω' なるものが存在するといふことになつて,仮定に反する.

f(u) のが前記の直線外には週期点をもたないならば、之を**単一週期函数**といひ、 $\pm \omega_0$ をその**基本週期**といる.依つて次の定理がある.

定理 4. 単一週期函数のすべての週期は一つの基本週期の整数倍として表される. 基本週期は二つある,一つを ω_0 とすれば他の一つは $-\omega_0$ である.

次には単一ならざる週期函数について考へて見よう. (そんなものが実際に存在することは後でわかる.)

単一週期でなければ前に述べた $\overline{0\omega_0}$ なる直線以外になほ週期点があるから,其一つを ω_1 とする. そこで二つの線分 $\overline{0\omega_0},\overline{0\omega_1}$ を二辺とする平行四辺形を作れば,その周囲及び内部にある週期点の数は有限である. 何となれば,若し無数に多くあれば有限の所に集積点が出来て定理 3 に反するからでる. そこで此平行四辺形の周囲及び内部にある有限箇の週期



第15図

点の中で辺 $\overline{0\omega_0}$ に最近い点をとり(勿論 $0,\omega_0$ は除いて),之を ω_2 とする.そこで更に $\overline{0\omega_0}$ と $\overline{0\omega_2}$ とを二辺とする平行四辺形を作ると、今度は其四つの頂点より他には周囲にも内部にも週期点は存在しない、これは直線 $0\omega_0$ 上では ω_0 が0に最近いことと、又 ω_2 が直線 $0\omega_0$ に最近いことから直ちに出る結果である.

この最後の平行四辺形と合同なる平行四辺形を上下左右に隙間なく並べて数平面を 蔽ふと考へれば、その頂点は

$$m\omega_0 + n\omega_2$$
 $(m, n$ は整数)

なる位置にあつて此等は皆週期点である。而して此等より他には週期点は存在し得ない,何となれば若し他に週期点があつたとすれば隙間なく並べた平行四辺形の何れかの内部又は周上に在る筈だから,従つて之に ω_0 及び ω_2 の適当な整数倍を加減すれば結局最初の $\overline{0\omega_0},\overline{0\omega_2}$ を二辺とする平行四辺形の内部又は周上に週期点がなければならぬことになつて,不都合である。

斯様な場合の函数 f(u) を**二重週期函数**といひ, ω_0,ω_2 を一対の**基本週期**といふ.

定理 5. 二重週期函数のすべての週期は一対の基本週期の各の整数倍の和として表される.

そこで次に起る問題は一つの二重週期函数の基本週期は唯一対に限るか否かといふことである、次に之を考へる。今一つの函数 f(u) のが二対の基本週期 (ω,ω') 及び (Ω,Ω') をもつて居たとする、即ち f(u) のすべての週期は (m,n,μ,ν) をあらゆる整数として) $m\omega+n\omega'$ なる形にも又 $\mu\Omega+\nu\Omega'$ なる形にも表されるものとする。然らば特別の場合として (Ω,Ω') 自身が (ω,ω') で、 (ω,ω') 自身が (Ω,Ω') で次の如く表されなければならぬ。

$$\left.\begin{array}{l}
\Omega = a\omega + b\omega' \\
\Omega' = c\omega + d\omega'
\end{array}\right\} \qquad (1) \qquad \left.\begin{array}{l}
\omega = \alpha\Omega + \beta\Omega' \\
\omega' = \gamma\Omega + \delta\Omega'
\end{array}\right\} \qquad (2)$$

係数 a, b, c, d 及び $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ はすべて整数である. (2) を (1) に代入すれば

$$\Omega = (a\alpha + b\gamma)\Omega + (a\beta + b\delta)\Omega'
\Omega' = (c\alpha + d\gamma)\Omega + (c\beta + d\delta)\Omega'$$
(3)

12. 週期函数 35

となる.こゝで注意すべきことは, Ω 及び Ω' は原点と共に一直線上にはないことである,何となれば若し原点と共に一直線上にあれば $\mu\Omega + \nu\Omega'$ なる形の数もすべて其直線上にあつて結局 f(u) 単一週期函数になるからである.そこで (3) の第一式の右辺を見ると,係数 $(a\alpha + b\delta)$ 及び $a\beta + b\delta$ は共に実数であるから若し後者が 0 でなければ此右辺の値は Ω とは相異なる偏角を有することになる,従つて勿論之が左辺の Ω と相等しいことは出来ない.故に必ずや $a\beta + b\delta$ 従つて又 $a\alpha + b\nu = 1$ でなければならぬ.第二式についても同様に推理されて,結局

$$\begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

なることを知る. 依つて

$$\begin{vmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = 1,$$

然るに此左辺の各括弧内の式は整数を表す筈であるから,上式が成立するためには是 非とも

$$ad - bc = \pm 1$$
 \exists $\alpha \delta - \beta \gamma = \pm 1$

でなければならぬ、故に f(u) の一対の基本週期を (ω,ω') とすれば、同函数の他の基本週期は(もしあれば)すべて

$$(a\omega + b\omega', c\omega + d\omega')$$
 $(a, b, c, d$ は整数,且 $ad - bc = \pm 1)$

なる形で表されるものである.

逆に又上記の如き一対の数

$$\Omega = a\omega + b\omega', \quad \Omega = c\omega + d\omega'$$

を取つて見ると, 之から

$$\pm \omega = d\Omega - b\Omega', \quad \pm \omega' = -c\Omega + a\Omega'$$

を得る. 従つて $m\omega + n\omega'$ なる形の数はすべて Ω, Ω' の整数倍の和として表されることが判る. 故に (Ω, Ω') は一対の基本週期である.

さて ad-bc=1 なる如き整数 a,b,c,d を求めることは初等整数論で容易に解決される問題で、而も斯様な整数の組は無数に多くある。故に

定理 6. 一つの二重週期函数は無数に多くの基本週期を有する. 其中の任意の一対を (ω,ω') とすれば、すべての基本週期は

$$(a\omega + b\omega', c\omega + d\omega')$$

なる形で表される、こゝに a, b, c, d は整数で且

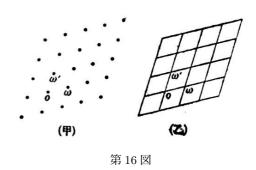
$$ad - bc = \pm 1$$

なる関係を有するものとする.

週期点 $m\omega+n\omega'$ の全体は数平面上に於て縦横に整列した格子点を表す(甲図). (ω,ω') を一対の基本週期に選んだといふ事は, $\overline{0\omega}$, $\overline{0\omega'}$ を二辺とする平行四辺形を基本として全平面を之と合同なる平行四辺形の網の口で蔽つて,すべての格子点を丁度その網の結び目に当らせる様にしたといふことである(乙円). 即ち,単なる格子点の集合の上に網を張つて之を系統立てたのである.

基本週期のとり方に種々あるといふことは、同一の格子点の集合を系統立てるのに、網の目の張り方が種種に可能であるといふ事に他ならぬ、第17図を見よ.

扨以上の研究によつて見ると,一価なる週期函数は単一週期か然らざれば当然二重週期となるのであつて,三重以上の週期函数といふものは(一価函数では)有り得ないのである.即ち



 $\begin{cases} \mathcal{Q} = \omega, \\ \mathcal{Q} = \omega, \end{cases} \begin{cases} \mathcal{Q} = \omega + \omega, \\ \mathcal{Q} = 2\omega - \omega, \\ \mathcal{Q} = 2\omega - \omega, \end{cases}$

第17図

定理 7. 一価解析函数にして週期的なるものは単一又は二重週期函数に限る.

一般なる週期函数に関する研究はこゝに止めて,次には再び第一種楕円積分の逆函数の考察に戻ることにする.

13. 楕円函数

前々節に於ける如く第一楕円積分 $u=\int^z \frac{dz}{\sqrt{\varphi(z)}}$ の逆函数を z=f(u) ので表せば,

$$f{u+mP(A)+nP(B)} = f(u)$$
 (m,n は整数)

なる関係がある事は既に之を知つた。併し之を以て直ちに f(u) のが二重週期函数であるとは断定出来ぬ,何となれば若しかしたら P(A) と P(B) とが或る同一の数の倍数であつて f(u) のは実は単一週期函数であるのかも知れぬからである.

今仮りに f(u) が単一週期函数であるとし、その基本週期を ω とすれば、R 面上の一点 z に対する u のすべての値は

$$\int_{c}^{z} \frac{dz}{\sqrt{\varphi(z)}} = u + u\omega \quad (n \text{ は整数})$$

で表される. 依つて今

$$\Phi(z) = e^{2\pi i \frac{u}{\omega}}$$

なる z の函数を考へれば、これは R 面上に於て一価である何となれば今 z が R 面上に於て一定ならば積分路が変つても u が $u+n\omega$ に変るに過ぎず、従つて $2\pi i\frac{u}{\omega}$ が $2n\pi i$ だけ変化するに過ぎないから、 $\Phi(z)$ は不変である.而して u は第一種積分であるから

14. sn 函数 37

z の如何なる値に於ても正則である.然らば $\Phi(z)$ は R 面上で一価で到る所正則であるから.常数でなければならぬ(第 5 節の最後の定理), 従つて u も常数といふことになる,これは今吾々の考へて居る所と反する.

もしまた P(A), P(B) が共に 0 となつて f(u) が全然無週期となれば,積分 u 自身が R 面上で一価正則,従つて常数,となつて矢張り不都合である.

之に依つて f(u) は確かに二重週期函数なることを知る.

注意 P(A), P(B) の何れか一方が 0 となつたり、又は比 P(A): P(B) が実数になつたりすることもない、それは上の証明から明かである.

今数平面上に任意の一点 u をとり、之と $u_0+P(A)$ 及び $u_0+P(B)$ とを夫々結ぶ線分を二辺とする平行四辺形を作り、之と合同なる平行四辺形をその上下左右に隙間なく並べて全平面を蔽つたと考へれば、f(u) は各平行四辺形内で全く同様なる値の分布を示す筈である。 斯様な平行四辺形の一つづゝを週期平行四辺形といふ。 特に $u_0=0$ とし、0, P(A), P(B), P(A) + P(B) を頂点とする週期平行四辺形を基本週期平行四辺形といふ。 形といふ。

一般に、楕円積分の逆といふ考を離れて、一価解析函数で二重週期を有し且無限遠点以外に於て有理型なるもの(極以外の特異点を有せぬもの)を**楕円函数**といふ。吾々の考へた z=f(u) は一つの楕円函数である.

14. sn 函数

標準形に於ける第一種楕円積分

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \tag{1}$$

を取り, その逆函数を

$$z = \operatorname{sn} u$$

と名づける. 但し被積分函数の根式の値は z=0 なるときに +1 となる方の分枝をとるものと定める.

三角函数の記号 sin は sine の略字であるが、sn は何の略字でもなく唯これだけの函数記号である、従つて読むときには文字通り「エスエヌ」と読む.

此函数の性質は被積分函数に含まれる k なる数に関係すること勿論である, k を sn 函数の**母数** (Modulus) といふ. 母数 k を明示する必要があるときには

$$z = \operatorname{sn}(u, k)$$

と書く.

 $1-k^2=k'^2$ と置くと、此 k' なるものも後に屡使用される重要な数である、之を**補 母数** (complementary modulus) といふ.

特にk = 0なるときは、(1)は

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \sin^{-1} z$$

となる、故に

$$\operatorname{sn}(u,0) = \sin u.$$

又k=1なるときは, (1)は

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z}$$

となる、故に

$$\operatorname{sn}(u,1) = \frac{e^{2u} - 1}{e^{2u} + 1} = \tanh u.$$

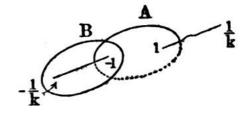
扨 $\operatorname{sn} u$ の性質として先づ第一に挙ぐべきものは二重週期性である. $\operatorname{sn} u$ が楕円函数 であつて, P(A) 及び P(B) の整数倍の和が週期なることは今までの研究で明かになつ たが, この P(A), P(B) の値に就て更に詳しく考へて見よう.

第6節で証明した如く

$$P(A) = \int_{(B)}, \quad P(B) = \int_{(-A)}$$

であるが、P(B) が週期ならば -P(B) も亦週期であるから、今こゝでは二つの積分 $\int_{(B)}$ 及び $\int_{(A)}$ を考へることにする. A 及び B は前に述べた通り図の如き閉曲線である、しかし積分路は被積分函数の正則なる範囲内では任意に変形しても積分の値に影響がないから、今 A の代

りに二点 1,-1 を結ぶ線分を二重に取る こととし(-1 から 1 に行き,又 -1 に帰 ると考へる)又 B の代りに二点 $-1,-\frac{1}{k}$ を結ぶ線分(即ち R 面の交叉線)を一度 は R 面の一葉に於て一度は他葉に於て前 と反対の方向に進むと考へた路を取るこ ととする.然すれば



第18図

$$\int_{(A)} = 2 \int_{-1}^{1} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = 4 \int_{0}^{1} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

又

$$\int_{(B)} = 2 \int_{-\frac{1}{k}}^{-1} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = 2 \int_{1}^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

こゝに於て

$$z = \frac{1}{\sqrt{1 - k'^2 t^2}}, \quad k'^2 = 1 - k^2$$

と置けば.

$$\int_{(B)} = 2i \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}},$$

となる. 依つて, 二つの積分

$$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \quad \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}}$$

の値を夫々 K, K' で表せば、

$$4K$$
, $2iK'$

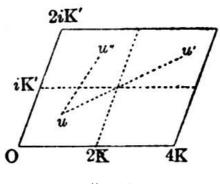
の整数倍の和はすべて sn u の週期である.

今原点と 4K 及び 2iK' なる点とを夫々結ぶ二つの線分を二辺として平行四辺形を作り、その中で $\operatorname{sn} u$ のとる値の分布状態を調べて見よう.

(1) によつて明かなる如く, zを -z に変ずれば u は -u となる, 故に

$$\operatorname{sn}(-u) = -z = -\operatorname{sn} u. \tag{2}$$

即ち sn **は奇函数である**. 今此平行四 辺形内の任意の一点を u とすれば,-u は形内にはないが,之と相合なる u'=4K+2iK'-u は形内にあつて,u と u' とは丁度平行四辺形の中心 2K+iK' に 関して対称の位置にある.而して此の二点に於て $\operatorname{sn} u'=-\operatorname{sn} u$ なる関係が成立するのであるから,平行四辺形内の値の分布を調べるには全形の半分 (例へば 2K と中心とを過る直線で半裁したもの) だ



39

第19図

けについて調べればよいので、これを中心の周りに 180°回転して且その値にすべて –1 を乗ずれば残りの半分の分布を得るのである.

次には形内の如何なる二点に於て $\operatorname{sn} u$ の値が相等しくなるかを考へて見る.それには (1) に於て z の同一の値に如何なる u の値が対応するかを調べればよい.z の一つの値($\pm 1, \pm \frac{1}{k}$ を除く)には R 面上の二点が対応する,蓋し R 面は二枚の数平面から成るものでその各葉の上に夫々与へられた z の値を代表する点があるからである.(分岐点 $\pm 1, \pm \frac{1}{k}$ だけ於ては両葉が融合して各唯一点となつて居る.) 今 (1) なる積分に於て,或る一葉の上の点 0 から同葉の点 z に至る種々の積分路に対する値を

$$u + 4mK + 2niK'$$
 (m, n は整数)

とすれば、同じ0から他葉の点zに至る積分は

$$2K - u + 4mK + 2niK'$$

で表される(第9節参照)。何となれば、0から他葉のzに行くには先づ0から1に行き、1の周りを小さく回つてR面の他葉に入り、従つて被積分函数の根号の符号を変じて1から0(前の0とは違ふ、他葉の0である)に行き、此0からzに行けばよい、之を式で書けば

$$\int_{0}^{1} \frac{dz}{\sqrt{}} + \int_{1}^{0} \frac{dz}{-\sqrt{}} + \int_{0}^{z} \frac{dz}{-\sqrt{}} = 2 \int_{0}^{1} \frac{dz}{\sqrt{}} - \int_{0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{}}$$
$$= 2K - \int_{0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{}}.$$

依つて前記の如き値を得る.

同一のzに対するuの値は以上の他にないが,この中で今考へる平行四辺形内に入るものは二つしかない,その一をuとすれば他の一はu''=2K+2iK'-uである.この二点はK+iK'に関して互に対称の位置にある.故に結局 (0,2K) 及び (0,iK') を二辺とする平行四辺形(全形の四分の一)内の値の分布を知れば,対称の考によつて全平行四辺形内の模様が判るのである.

$$\operatorname{sn} u = \operatorname{sn} u'' = \operatorname{sn}(2K + 2iK' - u) = \operatorname{sn}(2K - u)$$
, 即ち

$$\operatorname{sn}(2K - u) = \operatorname{sn} u,\tag{3}$$

これは重要な公式である. こゝでuに-uを代入し,(2)を利用すれば

$$\operatorname{sn}(2K+u) = -\operatorname{sn} u. \tag{4}$$

又 K の定義により

$$\operatorname{sn} K = 1$$
,

之と $\sin 0 = 0$ とから、(4) により

$$\operatorname{sn} 2K = 0, \operatorname{sn} 3K = -1, \operatorname{sn} 4K = 0.$$

上の研究によつて判明した如く, $\operatorname{sn} u$ は一つの平行四辺形内で同じ値を二度しか取らぬのである.故に $\operatorname{sn} u$ の零点は 0,2K の二つだけである.(4K は 0 と合同であるから別に数へない.)

然らば $\operatorname{sn} u$ の極は何所にあるか、之を求めるには積分

$$U = \int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

を計算しなければならぬ、こゝに

$$z = \frac{it}{\sqrt{1 - t^2}}$$

なる置換を行へば直ちに

$$U = i \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k'^2 t^2)}} = iK'$$

を得る. 故に

$$\operatorname{sn} iK' = \infty$$

従つてまた(4)により

$$\operatorname{sn}(2K + iK') = \infty.$$

故に極は iK' 及び 2K + iK' の二点である.

c >で序に前の $\int_{(B)}$ の計算の結果を思ひ出して見ると

$$\int_{1}^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^{2})(1-k^{2}z^{2})}} = iK'$$

であつた. 此左辺を書き直して

$$\int_{0}^{\frac{1}{k}} - \int_{0}^{1} = \int_{0}^{\frac{1}{k}} -K$$

として見ると

$$\int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = K + iK',$$

15. cn,dn 函数 41

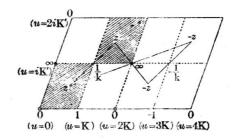
故に

$$\operatorname{sn}(K + iK') = \frac{1}{k}.$$

従つて(4)により

$$\operatorname{sn}(3K + iK') = -\frac{1}{k}.$$

以上の諸結果を総合すると $\operatorname{sn} u$ の値の分布に関して第 20 図を得る.



第 20 図

注意 上の理論で判明した通り、 $\operatorname{sn} u$ は週期平行四辺形内に於て一般に同一な値を二点に於てとるのであるが、 $\pm 1, \pm \frac{1}{k}$ だけは例外で各唯一点に於てのみとる。第 20 図で見ると丁度二点が相合して一点となつて居ることが判る、即ちこの四つの例外値だけは各第二位にとるのである。

15. cn,dn **函数**

再び前節の(1)を書く,

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \tag{1}$$

従つて

$$\frac{du}{dz} = \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

故に

$$\frac{d}{du}\operatorname{sn} u = \frac{dz}{du} = \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)} = \sqrt{(1-\operatorname{sn}^2 u)(1-k^2\operatorname{sn}^2 u)}$$
(2)

なる結果を得る. こゝで今

$$\sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 u} \tag{3}$$

なる函数を考へて見よう. 之は根号を帯びて居るから二価函数の様に見える, 然らば 分岐点は何所にあるかといふと

$$1 - \operatorname{sn}^2 u = 0$$

即ち

$$u=K,3K$$

でなければならぬ. そこで試みに u=K を中心として (3) を Taylor の級数に展開して見ることにする. 先づ

$$\varphi(u) = 1 - \operatorname{sn}^2 u$$

と置き、(2)を利用して計算すれば

$$\varphi'(u) = -2\operatorname{sn} u\sqrt{(1-\operatorname{sn}^2 u)(1-k^2\operatorname{sn}^2 u)},$$

$$\varphi''(u) = -2\operatorname{sn}\{1-2(1+k^2)\operatorname{sn}^2 u + 3k^2\operatorname{sn}^4 u\} \quad \mbox{$\mathemath{\mathemath{\$}}$}.$$

従つて

$$\varphi(K) = 0, \varphi'(K) = 0, \varphi''(K) = 2k'^2$$
 \(\xi\$.

故に

$$\varphi(u) = k'^2 (u - K)^2 + c_4 (u - K)^4 + \cdots$$
 $(c_4, \cdots$ は常数)

なる形の展開式を得る. 依つて

$$\sqrt{1-\operatorname{sn}^{2} u} = k'(u-K)\sqrt{1+\frac{c_{4}}{k'^{2}}(u-K)^{2}+\cdots}$$
$$= \pm k'(u-K)\left\{1+\frac{c_{4}}{k'^{2}}(u-K)^{2}+\cdots\right\}$$

即ち之に依つて見ると u=K は (3) なる函数の分岐点ではない,二つの離れた分枝が偶然に共に 0 なる値をとるに過ぎぬ.他の u=3K なる点についても全く同様の結果を得る故に (3) は二価函数ではない,実は二つの一価函数を表すものである.(例へば $\sqrt{1-\sin^2 u}$ が $\pm \cos u$ を表す如くに.)

こゝに於て此新函数を

$$\sqrt{1-\sin^2 u} = \operatorname{cn} u$$

と命名する,但し根式の二つの値の中 u=0 なるときに +1 となる方をとるものとする.

全く同様の研究により

$$\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u} = \operatorname{dn} u$$

も亦一価函数なることが証明される (矢張り dn 0 = 1 とする). cn, dn は夫々「シーエヌ」,「ディーエヌ」と読む. sn と同様にこれも略字ではなく,それだけの名である. これらの新函数を用るて (2) を書き直せば次の式を得る.

$$\frac{d}{du}\operatorname{sn} u = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u. \tag{4}$$

 $\operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u$ を微分すれば次の結果を得る.

$$\frac{d}{du}\operatorname{cn} u = \frac{d}{du}\sqrt{1 - \operatorname{sn}^{2} u} = \frac{-\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - \operatorname{sn}^{2} u} = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u,
\frac{d}{du}\operatorname{dn} u = \frac{d}{du}\sqrt{1 - k^{2}\operatorname{sn}^{2} u} = \frac{-k^{2}\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^{2}\operatorname{sn}^{2} u} = -k^{2}\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u.$$
(5)

(4), (5) を反復使用すれば高次の導函数も求められる. 従つてまた次の如き展開式を作ることも出来る.

$$\operatorname{sn} u = u - (1 + k^{2}) \frac{u^{3}}{3!} + (1 + 14k^{2} + k^{4}) \frac{u^{5}}{5!} - \cdots,$$

$$\operatorname{cn} u = 1 - \frac{u^{2}}{2!} + (1 + 4k^{2}) \frac{u^{4}}{4!} - \cdots,$$

$$\operatorname{dn} u = 1 - k^{2} \frac{u^{2}}{2!} + (4k^{2} + k^{4}) \frac{u^{4}}{4!} - \cdots.$$

16. 加法公式

一つの函数 f(u) について,一般に f(u),f(v) と f(u+v) との間の関係を表した式を其函数の加法公式 (又は加法定理) といふ,但しu,v は変数の二つの値である.

例へば e^u の加法公式は $e^{u+v}=e^u+e^v$. $\sin u$ の加法公式は $\sin(u+v)=\sin u\cos v+\cos u\sin v$. もし \sin のみで表さうと思へば $\cos u=\pm\sqrt{1-\sin^2 u}$ 等と書き直せばよい. 楕円函数 $\sin u$ の加法公式を求める一つの方法を次に述べる. 先づ次の如き微分方程式を考へる,

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = 0.$$
 (1)

此方程式は所謂変数分離形に属するから容易に解かれる、即ち今

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$v = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$$
(2)

と置けば

$$u + v = c \quad (c は常数) \tag{3}$$

は明かに(1)の解である.

さて (2) から

$$\frac{dx}{du} = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}, \quad \frac{dy}{dv} = \sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}$$

を得る. こゝに(3)を参照すれば更に次の式を得る,

$$\frac{dy}{du} = -\frac{dy}{dv} = -\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}.$$

これらの式から

$$\frac{d^2x}{du^2} = -(1+k^2)x + 2k^2x^3,$$
$$\frac{d^2y}{du^2} = -(1+k^2)x + 2k^2y^3,$$

従つて

$$\frac{y\frac{d^2x}{du^2} - x\frac{d^2y}{du^2}}{y^2\left(\frac{d^2x}{du^2}\right)^2 - x^2\left(\frac{d^2y}{du^2}\right)^2} = -\frac{2k^2xy}{1 - k^2x^2y^2}$$

を得る. 之を変形すれば

$$\frac{y\frac{d^2x}{du^2} - x\frac{d^2y}{du^2}}{y\frac{dx}{du} - x\frac{dy}{du}} = -\frac{2k^2xy\left(y\frac{dx}{du} + x\frac{dy}{du}\right)}{1 - k^2x^2y^2},$$

更にこの両辺を u に関して積分すれば

$$\log\left(y\frac{dx}{du} - x\frac{dy}{du}\right) = \log(1 - k^2x^2y^2) + c' \quad (c'は常数)$$

となる. 之から直ちに

$$\frac{y\frac{dx}{du} - x\frac{dy}{du}}{1 - k^2 x^2 y^2} = C' \quad (C' は常数)$$
(4)

を得る. (4) を u,v で表すには、之に

$$x = \operatorname{sn} u, \quad y = \operatorname{sn} v,$$

$$\frac{dx}{du} = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u, \quad \frac{dy}{du} = -\operatorname{cn} v \operatorname{dn} v$$

を代入すればよい. これによつて (4) は

$$\frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v} = C \tag{5}$$

となる. (5) も亦微分方程式 (1) の解である. 然るに (1) は第一階の常微分方程式であるから, 之が (3) 及び (5) なる二通りの解を有するとすれば, これらの両式の左辺の間には何等かの函数関係がなければならぬ. 依つて試みに (5) の左辺を f(u+v) に等しいと置き, こゝに於て v=0 とすれば

$$\operatorname{sn} u = f(u)$$

となる. 故に f なる函数は sn なることを知る.

之に依つて次の公式を得る,

$$\operatorname{sn}(u+v) = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}.$$
 (I)

これ即ち sn の加法公式である.

(I) の分母を D で表せば

$$D = \operatorname{cn}^2 u + \operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn}^2 v = \operatorname{cn}^2 v + \operatorname{sn}^2 v \operatorname{dn}^2 u$$

なることは容易に証明される. 依つて

$$cn^{2}(u+v) = 1 - sn^{2}(u+v)$$

$$= \frac{D^{2} - (sn u cn v dn v + sn v cn u dn u)^{2}}{D^{2}},$$

此分子に於て

$$D^{2} = (\operatorname{cn}^{2} u + \operatorname{sn}^{2} u \operatorname{dn}^{2} v)(\operatorname{cn}^{2} v + \operatorname{sn}^{2} v \operatorname{dn}^{2} u)$$

と置いて計算すれば結局

$$\operatorname{cn}(u+v) = \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v - \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}.$$
 (II)

を得る, これ即ち cn 函数の加法公式である. 又同様にして

$$D = dn^2 u + k sn^2 u cn^2 v = dn^2 v + k^2 sn^2 v cn^2 u$$

なることを利用すれば,

$$dn(u+v) = \frac{dn u dn v - k^2 sn u sn v cn u cn v}{1 - k^2 sn^2 sn^2 v}$$
(III)

を得る、これ即ち dn 函数の加法公式である.

扨こゝで

$$\operatorname{sn} K = 1, \ \operatorname{cn} K = 0, \ \operatorname{dn} K = k'$$

16. 加法公式 45

なることに注意すれば上の加法公式により直ちに次の結果を得る.

$$\begin{cases}
\operatorname{sn}(u+K) &= \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u} \\
\operatorname{cn}(u+K) &= -\frac{k' \operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u} \\
\operatorname{dn}(u+K) &= \frac{k'}{\operatorname{dn} u}
\end{cases}
\begin{cases}
\operatorname{sn}(u+2K) &= -\operatorname{sn} u \\
\operatorname{cn}(u+2K) &= -\operatorname{cn} u \\
\operatorname{dn}(u+2K) &= \operatorname{dn} u
\end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{sn}(u+3K) &= -\frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u} \\ \operatorname{cn}(u+3K) &= \frac{k' \operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u} \\ \operatorname{dn}(u+3K) &= \frac{k'}{\operatorname{dn} u} \end{cases} \begin{cases} \operatorname{sn}(u+4K) &= \operatorname{sn} u \\ \operatorname{cn}(u+4K) &= \operatorname{cn} u \\ \operatorname{dn}(u+4K) &= \operatorname{dn} u \end{cases}$$

なほ (I), (II), (III) を他の形に直したり、又は之から種々雑多な公式を誘導したりすることも出来るが一々これを列挙しては非常に頁数を費すことになるからこゝには省略することとし、たゞ二三の簡単なものを次に挙げて置く.

$$\begin{cases}
\operatorname{sn}(u+v) = \frac{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 v}{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v - \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u} \\
\operatorname{cn}(u+v) = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} v - \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v - \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u} \\
\operatorname{dn}(u+v) = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v - \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v - \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u} \\
\begin{cases}
\operatorname{sn} 2u = \frac{2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u} \\
\operatorname{cn} 2u = \frac{1 - 2 \operatorname{sn}^2 u + k^2 \operatorname{sn}^4 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u} \\
\operatorname{dn} 2u = \frac{1 - 2k^2 \operatorname{sn}^2 u + k^2 \operatorname{sn}^4 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u} \\
\end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{sn}(u+v)\operatorname{sn}(u-v) = \frac{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v} \\ \operatorname{cn}(u+v)\operatorname{cn}(u-v) = \frac{\operatorname{cn}^2 u - \operatorname{sn}^2 v \operatorname{dn}^2 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v} \\ \operatorname{dn}(u+v)\operatorname{dn}(u-v) = \frac{\operatorname{dn}^2 u - k^2 \operatorname{sn}^2 v \operatorname{cn}^2 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v} \end{cases}$$

17. 乗法公式

前節で得た加法公式に於て u=v と置けば $\operatorname{sn}^2 u,\operatorname{cn}^2 u,\operatorname{dn}^2 u$ を $\operatorname{sn} u,\operatorname{cn} u,\operatorname{dn} u$ で表した式を得る,前頁の第二組の公式がそれである,之を仮りに二倍公式と呼ばう.

更に加法公式に於てv=2uと置き、こゝに二倍公式を代入すれば、 $\operatorname{sn} 3u$ 等を $\operatorname{sn} u$ 等で表した三倍公式を得る.次第に斯くの如く加法公式を反復使用すれば何倍公式でも求められる筈である.これらの公式を総称して**乗法公式**といる.

乗法公式を算出するには次の如き方法によるのが便利である。 先づ n を任意の自然数とするとき、

n が奇数ならば

$$\begin{cases}
\operatorname{sn} nu = \frac{xA_n(x^2)}{D_n(x^2)} \\
\operatorname{cn} nu = \frac{yB_n(x^2)}{D_n(x^2)} \\
\operatorname{dn} nu = \frac{zC_n(x^2)}{D_n(x^2)}
\end{cases}$$
(1)

n が偶数ならば

$$\begin{cases}
\operatorname{sn} nu = \frac{xyzA_n(x^2)}{D_n(x^2)} \\
\operatorname{cn} nu = \frac{B_n(x^2)}{D_n(x^2)} \\
\operatorname{dn} nu = \frac{C_n(x^2)}{D_n(x^2)}
\end{cases}$$
(2)

と置くことが出来る(数学的帰納法). 但しこゝに

$$x = \operatorname{sn} u$$
, $y = \operatorname{cn} u$, $z = \operatorname{dn} u$,

又 A_n, B_n, C_n, D_n は各 x^2 の多項式である. n = 1, 2 なる場合は既に知れる所により

$$A_1 = 1$$
, $B_1 = 1$, $C_1 = 1$, $D_n = 1$,

及び

$$\begin{cases}
A_2 = 2 \\
B_2 = 1 - 2x^2 + k^2 x^4 \\
C_2 = 1 - 2k^2 x^2 + k^2 x^4 \\
D_2 = 1 - k^2 x^4
\end{cases}$$

とする.

次に加法公式に於て u,v を夫々 nu,nu 又は nu,(n+1)u と置き,こゝに (1) 又は (2) を代入する,例へば sn の加法公式に於ける u,v を共に nu とすれば,

$$\operatorname{sn} 2nu = \frac{2\operatorname{sn} nu\operatorname{cn} nu\operatorname{dn} nu}{1 - k^2\operatorname{sn}^4 nu},$$

依つて今 n を奇数とすれば

$$\frac{xyzA_{2n}}{D_{2n}} = \frac{2\frac{xA_n}{D_n}\frac{yB_n}{D_n}\frac{zC_n}{D_n}}{1 - k^2\frac{x^4A_n^4}{D_n^4}} = \frac{2xyzA_nB_nC_nD_n}{D_n^4 - k^2x^4A_n^4},$$

17. 乗法公式 47

従つて,

$$A_{2n} = A_n B_n C_n D_n,$$

$$D_{2n} = D_n^4 - k^2 x^4 A_n^4.$$

又 n を偶数とすれば

$$\frac{xyzA_{2n}}{D_{2n}} = \frac{2\frac{xyzA_n}{D_n}\frac{B_n}{D_n}\frac{C_n}{D_n}}{1 - k^2\frac{x^4y^4z^4A_n^4}{D_n^4}} = \frac{2xyzA_nB_nC_nD_n}{D_n^4 - k^2x^4y^4z^4A_n^4},$$

従つて

$$A_{2n} = 2A_n B_n C_n D_n,$$

$$D_{2n} = D_n^4 - k^2 x^4 y^4 z^4 A_n^4.$$

斯様にして種々の場合を調べると結局次の関係式を得る. n が奇数なるとき

$$\begin{cases} A_{2n} &= 2A_n B_n C_n D_n \\ B_{2n} &= y^2 B_n^2 D_n^2 - x^2 z^2 A_n^2 C_n^2 \\ C_{2n} &= z^2 C_n^2 D_n^2 - k^2 x^2 y^2 A_n^2 B_n^2 \\ D_{2n} &= D_n^4 - k^2 x^4 A_n^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_{2n+1} &= A_n B_n C_n D_n + y^2 z^2 A_{n+1} B_n C_n D_{n+1} \\ B_{2n+1} &= B_n B_{n+1} D_n D_{n+1} - x^2 z^2 A_n A_{n+1} C_n C_{n+1} \\ C_{2n+1} &= C_n C_{n+1} D_n D_{n+1} - k^2 x^2 y^2 A_n A_{n+1} B_n B_{n+1} \\ D_{2n+1} &= D_n^2 D_{n+1}^2 - k^2 x^4 y^2 z^2 A_n^2 A_{n+1}^2 \end{cases}$$

n が偶数なるとき

$$\begin{cases}
A_{2n} &= 2A_n B_n C_n D_n \\
B_{2n} &= B_n^2 D_n^2 - x^2 y^2 z^2 A_n^2 C_n^2 \\
C_{2n} &= C_n^2 D_n^2 - k^2 x^2 y^2 z^2 A_n^2 B_n^2 \\
D_{2n} &= D_n^4 - k^2 x^4 y^4 z^4 A_n^4
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
A_{2n+1} &= y^2 z^2 A_n B_{n+1} C_{n+1} D_n + A_{n+1} B_n C_n D_{n+1} \\
B_{2n+1} &= B_n B_{n+1} D_n D_{n+1} - x^2 z^2 A_n A_{n+1} C_n C_{n+1} \\
C_{2n+1} &= C_n C_{n+1} D_n D_{n+1} - k^2 x^2 y^2 A_n A_{n+1} B_n B_{n+1} \\
D_{2n+1} &= D_n^2 D_{n+1}^2 - k^2 x^4 y^2 z^2 A_n^2 A_{n+1}^2
\end{cases}$$

試みに A_3, \cdots, A_4, \cdots を計算すれば次の如くである.

$$\begin{cases} A_3 &= 3 - 4(1+k^2)x^2 + 6k^2x^4 - k^4x^8 \\ B_3 &= 1 - 4x^2 + 6k^2x^4 - 4k^4x^6 + k^4x^8 \\ C_3 &= 1 - 4k^2x^2 + 6k^2x^4 - 4k^2x^6 + k^4x^8 \\ D_3 &= 1 - 6k^2x^4 + 4k^2(1+k^2)x^6 - 3k^4x^8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_4 &= 4 - 8(1+k^2)x^2 + 20k^2x^4 - 20k^4x^8 + 8k^4(1+k^2)x^{10} - 4k^6x^{12} \\ B_4 &= 1 - 8x^2 + 4(2+5k^2)x^4 - 8k^2(3+4k^2)x^6 + 2k^4(27+8k^2)x^8 \\ - 8k^4(3+4k^2)x^{10} + 4k^4(2+5k^2)x^{12} - 8k^6x^{14} + k^8x^{16} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_4 &= 1 - 8k^2x^2 + 4k^2(5+2k^2)x^4 - 8k^2(4+3k^2)x^6 + 2k^2(8+27k^2)x^5 \\ - 8k^4(4+3k^2)x^{10} + 4k^6(5+2k^2)x^{12} - 8k^8x^{14} + k^8x^{16} \end{cases}$$

$$D_4 &= 1 - 20k^2x^4 + 32k^2(1+k^2)x^6 - 2k^2(8+29k^2+8k^4)x^8 \\ + 32k^4(1+k^2)x^{10} - 20k^6x^{12} + k^8x^{16} \end{cases}$$

注意 加法公式を利用して A_n, \cdots から A_{n+1}, \cdots を求める関係を作ると、それによって出来る $\frac{A_{n+1}}{D_{n+1}}, \cdots$ が既約分数でないといふ不便が伴ふ.

18. 不定積分

sn 等の函数の微分法は第 15 節の所論で容易に判るが、積分法はさう簡単には出来ない、本節では一般に

$$\frac{A(x,y,z)}{B(x,y,z)}\tag{1}$$

なる形の函数の積分法を述べる、但しこゝに

$$x = \operatorname{sn} u, \ y = \operatorname{cn} u, \ z = \operatorname{dn} u,$$

又 A. B は係数がすべて常数なる多項式を表す.

先づ $y^2=1-x^2, z^2=1-k^2x^2$ なる関係を利用することによつて A 及び B の中には y,z の二乗以上の冪が含まれぬ様にすることが出来る. 然る後 (1) の分母子に

$$B(x,-y,z)B(x,y,-z)B(x,-y,-z)$$

を乗じて、その結果を更に整頓すれば、分母はxのみの多項式となり分子にはy,zの二乗以上の冪が含まれぬ様になる。依つて結局(1)は

$$R_1(x) + yR_2(x) + zR_3(x) + yzR_4(x)$$
 (2)

となる, c > k R は有理函数を示す. さて (2) の各項を積分しなければならぬが, 先 づ最後の項をとれば

$$\int yzR_4(x)\,du = \int R_4(x)\,dx \qquad \left(\stackrel{.}{\text{$\not$$}} \stackrel{...}{du} = yz. \right)$$

となつて、之は有理函数の積分であるから容易に出来る。同様の考により、

$$\int yR_2(x) \, du = \int \frac{R_2(x)}{\sqrt{1 - k^2 x^2}} \, dx,$$
$$\int zR_3(x) \, du = \int \frac{R_3(x)}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx$$

であるが、これらも共に積分可能なること周知の通りである。最後に残つた $R_1(x)$ を積分するために之を部分分数に分解すると結局次の二種の項に分れる、

$$x^m, (x-a)^{-m}$$

但しmは0又は正の整数,aは一般には複素常数である。これらの積分を求めるには次に述べる如き漸化式による。

先づ微分法により

$$\frac{d}{du}(x^{m-3}yz) = (m-3)x^{m-4}y^2z^2 - x^{m-2}z^2 - k^2x^{m-2}y^2$$
$$= (m-1)k^2x^m - (m-2)(1+k^2)x^{m-2} + (m-3)x^{m-4},$$

故に

$$I_m = \int x^m \, du$$

と置けば,

$$x^{m-3}yz = (m-1)k^2I_m - (m-2)(1+k^2)I_{m-2} + (m-3)I_{m-4},$$

なる関係を得る. 之に依つて、 I_m を求めることは結局

$$I_2 = \int \operatorname{sn}^2 u \, du, \ I_1 = \int \operatorname{sn} u \, du \tag{3}$$

の二つに帰する.

又x-a=tと置けば

$$\frac{d}{du}(t^{-m+1}yz) = (-m+1)t^{-m}y^2z^2 - t^{-m+1}x(z^2 + k^2y^2)
= -(m-1)(1-a^2)(1-k^2a^2)t^{-m}
+ (2m-3)(1+k^2-2k^2a^2)at^{-m+1}
+ (m-2)(1+k^2-6k^2a^2)t^{-m+2}
- (2m-5)2k^2at^{-m+3}
- (m-3)k^2t^{-m+4}$$
(4)

である, 依つて

$$J_m = \int \frac{du}{t^m}$$

と置けば一般に J_m を求めることは

$$J_1, J_0, J_{-1}, J_{-2}$$

を求めることに帰する. 然るに

$$J_0 = \int du, \ J_{-1} = \int (x-a) du, \ J_{-2} = \int (x-a)^2 du$$

であるから、前の(3)の他に新たに考ふべき積分は

$$J_1 = \int \frac{du}{\operatorname{sn} u - a} \tag{5}$$

唯一つとなる.若し特に a の値が $(1-a^2)(1-k^2a^2)=0$ ならしめるときは (4) の右辺 の第一項が消滅するから J_1 も J_0,J_{-1},J_{-2} に帰着せしめられ,(5) を考へることは不要となる.さて斯くしていよいよ最後に残された積分は (3) 及び (5) であるが,その中 J_1 は次の如く既知函数で表される.

(第一法) 先づ u = 2v と置けば

$$I_1 = \int \operatorname{sn} du = 2 \int \operatorname{sn} 2v \, dv = 2 \int \frac{2 \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 v} \, dv.$$

更に $\operatorname{sn}^2 v = t$ と置けば

$$I_1 = 2 \int \frac{dt}{1 - k^2 t^2} = \frac{1}{k} \log \frac{1 + kt}{1 - kt}.$$

故に

$$I_1 = \frac{1}{k} \log \frac{1 + k \operatorname{sn}^2 \frac{u}{2}}{1 - k \operatorname{sn}^2 \frac{u}{2}}.$$

(第二法) 先づ $\operatorname{sn} u = x$ と置けば

$$I_1 = \int \operatorname{sn} u \, du = \int \frac{x dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}.$$

次に $x^2 = t$ と置けば

$$I_1 = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{(1-t)(1-k^2t)}} = -\frac{1}{k} \log(k\sqrt{1-t} + \sqrt{1-k^2t})$$

= $-\frac{1}{k} \log(k \operatorname{cn} u + \operatorname{dn} u)$.

 I_2 及び J_1 は上の様には処理されぬが、これらは $\operatorname{sn} u = x$ を変数として表せば

$$I_2 = \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad J_1 = \frac{x dx}{\sqrt{(x-a)(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

となり、これ即ち第二種及び第三種の楕円積分に他ならない (第3節). これらの計算法は第39節に於て論ずることとする.

19. 実楕円函数

実楕円積分を標準形に直すときには其母数を 0 < k < 1 ならしめ得ることは第 4 節で証明した通りである。 斯様な特別なる母数をもつ楕円函数 $\mathrm{sn,cn,dn}$ 等は実用問題にも屡現れるし又前節までに取扱ひ来つた一般のものよりも簡単で理会し易い点もあるから,以下特に之について述べることにする。

$$u = \int_0^x \frac{xdx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \ 0 < k < 1$$

19. 実楕円函数 51

に於て,

$$x = \sin \varphi \tag{1}$$

と置けば

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

となる (今後この形の積分をも第一種楕円積分と呼ぶ),但し φ は実変数,従つ て x は $0 \le |x| \le 1$ なるものと考へる. u を φ の函数と考へれば単調増加函

数である、それ $\frac{du}{d\varphi}$ を考へれば直ちに判る. 従って φ を u の函数と考へても単調増加函数である、この函数を**振幅** (Amplitude) と名づけ

$$\varphi = \operatorname{am} u \tag{2}$$

と書く. 既に知れる Кの定義により

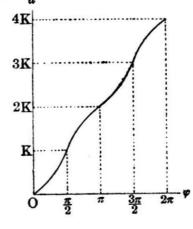
$$\operatorname{am} K = \frac{\pi}{2}$$

一般に

$$\operatorname{am}(nK) = \frac{n\pi}{2} \quad (n は整数)$$

である.

(1), (2) から



第21図

 $x = \sin \varphi = \sin \operatorname{am} u$,

即ち

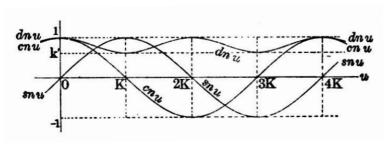
 $\operatorname{sn} u = \operatorname{sin} \operatorname{am} u$

となる. 同様にして

 $\operatorname{cn} u = \operatorname{cos} \operatorname{am} u, \ \operatorname{dn} u = \Delta \operatorname{am} u$

である,但し $\Delta(t)$ は $\sqrt{1-k^2\sin^2 t}$ なる函数を示す記号とする.

u と am u との関係は前の図によつて明かなる如く大体正比例に近い,従つて実変数 u に対する sn u, cn u, dn u の変化を示す曲線は夫々 sin u, cos u, Δu のそれに似たもの である.



第 22 図

次に変数 u が純虚数なるときの $\operatorname{sn} u$ 等の値を調べるために

$$x = \frac{it}{\sqrt{1 - t^2}}\tag{3}$$

と置けば,

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = i \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}}$$

なる結果を得る. 此各辺を iu に等しいと置けば、之から

$$x = \operatorname{sn}(iu, k), \ t = \operatorname{sn}(u, k')$$

を得る. 之を (3) に代入すれば

$$\operatorname{sn}(iu, k) = \frac{i \operatorname{sn}(u, k')}{\operatorname{cn}(u, k')},$$

従つて

$$cn(iu, k) = \sqrt{1 - sn^2(iu, k)} = \frac{1}{cn(u, k')},$$
$$dn(iu, k) = \sqrt{1 - k^2 sn^2(iu, k)} = \frac{dn(u, k')}{cn(u, k')}$$

なる式を得る, 但し最後の分子を算出するときには

$$dn^{2}(u, k') = 1 - k'^{2} \operatorname{sn}^{2}(u, k')$$

なることに注意するを要する.

一々母数を添記するのは面倒であるから、 $\operatorname{sn}(u,k)$ は単に $\operatorname{sn} u$ とし、 $\operatorname{sn}(u,k')$ は $\operatorname{sn} u$ とする等の規約を設けることにすれば、上の三式は次の様になる.

$$\operatorname{sn}(iu) = \frac{i \operatorname{\overline{sn}} u}{\operatorname{\overline{cn}} u}, \ \operatorname{cn}(iu) = \frac{1}{\operatorname{\overline{cn}} u}, \ \operatorname{dn}(iu) = \frac{\overline{\operatorname{dn}} u}{\operatorname{\overline{cn}} u}.$$

 \mathbf{c} > に於て加法定理により更に次の公式を得る、之によつて複素変数に対する $\mathbf{sn}(u+iv)$ 等を実函数を以て表すことが出来たのである.

$$\begin{cases} \operatorname{sn}(u+iv) = \frac{\operatorname{sn} u \,\overline{\operatorname{dn}} v + i \operatorname{cn} u \,\operatorname{dn} u \,\overline{\operatorname{sn}} v \,\overline{\operatorname{cn}} v}{\frac{-2}{\operatorname{cn}} v + k^2 \operatorname{sn}^2 u \,\overline{\operatorname{sn}}^2 v}, \\ \operatorname{cn}(u+iv) = \frac{\operatorname{cn} u \,\overline{\operatorname{cn}} v - i \operatorname{sn} u \,\operatorname{dn} u \,\overline{\operatorname{sn}} v \,\overline{\operatorname{dn}} v}{\frac{-2}{\operatorname{cn}} v + k^2 \operatorname{sn}^2 u \,\overline{\operatorname{sn}}^2 v}, \\ \operatorname{dn}(u+iv) = \frac{\operatorname{dn} u \,\overline{\operatorname{cn}} v \,\overline{\operatorname{dn}} v - i k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \,\overline{\operatorname{sn}} v}{\frac{-2}{\operatorname{cn}} v + k^2 \operatorname{sn}^2 u \,\overline{\operatorname{sn}}^2 v}. \end{cases}$$

特にv = K' 2K'と置けば次の結果を得る

$$\begin{cases}
\operatorname{sn}(u+iK') = \frac{1}{k} \frac{1}{\operatorname{sn} u} \\
\operatorname{cn}(u+iK') = -\frac{i}{k} \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u} \\
\operatorname{dn}(u+iK') = -i \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}
\end{cases}
\end{cases}
\begin{cases}
\operatorname{sn}(u+2iK') = \operatorname{sn} u \\
\operatorname{cn}(u+2iK') = -\operatorname{cn} u \\
\operatorname{dn}(u+2iK') = -\operatorname{dn} u
\end{cases}$$

 sn の一対の基本週期が 4K, 2iK' になることは既知であるが、本節の研究によつて cn dn の基本週期は夫々

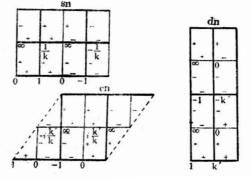
$$4K$$
, $2K + 2iK'$ 及び $4K$, $2iK'$

なることを知る.

20. Landen の変換 53

sn, cn, dn の各についてその基本週期平行四辺形内に於ける値の分布を図示すれば次の如くである. 但し各図に於て何れも左下の端を原点とし、横の一画を K, 縦の一画を iK' とする. 図中の数字及び文字は其点に於ける函数の値を示し、又太い実線は実数を、細い実線は純虚数を示す.

例へば



$$\operatorname{sn} K = 1, \ \operatorname{sn} iK' = \infty, \ \operatorname{sn}(K + iK') = \frac{1}{k},$$

又uが0とiK'とを結ぶ線分上にあるときは

$$\Re(\operatorname{sn} u) = 0, \ \Im(\operatorname{sn} u) > 0.$$

20. Landen の変換

大小二円があつて一方が全く他方の内部にあるものとする(第 24 図). 大円の中心を C、小円のを C とし,C 及び C を過る大円の直径を C とし,大小二円の半径を夫々 C とする. 中心の距離を C とすれば C とすれば C とする.

小円にTに於て切する大円の一つの弦FF'を引き,

$$\angle ACF = 2\varphi, \ \angle ACF = 2\varphi'$$

とする. 然るときは

$$\overline{FT}^2 = \overline{Fc}^2 - r^2 = (R^2 + \delta^2 + 2R\delta\cos 2\varphi) - r^2$$
$$= (R + \delta)^2 - r^2 - 4R\delta\sin^2\varphi.$$

こゝで

$$\frac{4R\delta}{(R+\delta)^2 - r^2} = k^2 \tag{1}$$

と置けば,

$$\overline{FT} = \sqrt{(R+\delta)^2 - r^2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$$

となる. 全く同様にして

$$\overline{F'T} = \sqrt{(R+\delta)^2 - r^2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi'},$$

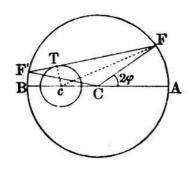
従つて

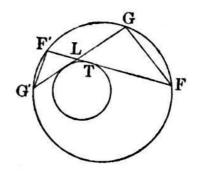
$$\overline{FT}: \overline{F'T} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}: \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi'}$$
 (2)

なる関係を得る.

今 FF' が小円に切しつ > GG' の如く変位したと考へ (第 25 図), φ 及び φ' に於ける変りを $d\varphi$, $d\varphi'$ とし,FF' と GG' との交点を L とすれば,

$$d\varphi: d\varphi' = \widehat{FG}: \widehat{F'G'}.$$





第 24 図

第 25 図

 $d\varphi, d\varphi'$ が無限小となる極限に於ては

$$\widehat{FG}:\widehat{F'G'}=\overline{FG}:\overline{F'G'}=\overline{FL}:\overline{LF'}=\overline{FT}:\overline{TF'}.$$

依つて

$$d\varphi:d\varphi'=\widehat{FT}:\widehat{TF'}.$$

之と(2)とから

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{d\varphi'}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi'}} \tag{3}$$

なる結果が得られる. こゝに 0 < k < 1 なることは (1) に於て $\delta < R - r$ なる仮定を用ゐれば容易に証明される.

 φ と φ' との間に成立する (3) なる関係は k にのみ関するもので R,r,δ などの箇々の値には無関係である。依つて今 k と R とを一定に保ちつ > $r\to 0$ ならしめれば、極限に於て

$$\frac{4R\delta}{(R+\delta)^2} = k^2,$$

従つて

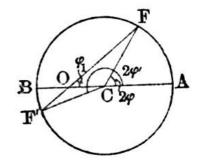
$$\delta = \frac{1 - k'}{1 + k'} R, \ k' = \sqrt{1 - k^2}$$

を得る. 直径 AB 上に此 δ の値に等しく \overline{CO} をとれば、点 O は前の円 c の縮小した極限と見られる.

故に O を過る弦 FF' を引き

$$\angle ACF = 2\varphi, \ \angle ACF' = 2\varphi$$

とすれば、(3) が矢張り成立する.又前頁の図 に於ける T も O に一致してゐるのであるから



第 26 図

$$\overline{FO} = (R+\delta)\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}.$$
 (4)

今 $\angle AOF = \varphi_1$ とすれば,

$$\overline{CF} : \overline{CO} = \sin \varphi_1 : \sin(2\varphi - \varphi_1).$$

20. Landen の変換 55

然るに

$$\overline{CF} = R$$
, $\overline{CO} = k_1 R$ (但し $k_1 = \frac{1 - k'}{1 + k'}$)

であるから,

$$\sin(2\varphi - \varphi_1) = k\sin\varphi_1\tag{5}$$

となる. 又一方に於て直接に図からして

$$\varphi_1 = \varphi + \varphi' - \frac{\pi}{2}$$

なることも容易に証明される. 之を微分すれば

$$d\varphi_1 = d\varphi + d\varphi',$$

従つて

$$\frac{d\varphi_1}{d\varphi} = 1 + \frac{d\varphi'}{d\varphi} = 1 + \frac{OF'}{FO} = \frac{FF'}{FO}.$$
 (6)

扨 FO は (4) に示す如くであるが,FF' が未だ計算されて居ない,次に之を求めよう. 先づ $\overline{FF'}=\overline{FO}+\overline{OF'}$ で, \overline{FO} と $\overline{OF'}$ との差と積とは次の通りである.

$$\overline{OF} - \overline{OF'} = 2 \cdot \overline{OC} \cos \varphi_1 = 2Rk_1 \cos \varphi_1$$

$$\overline{OF} \cdot \overline{OF'} = \overline{OA} \cdot \overline{OB} = R(1 + k_1) \cdot R(1 - k_1) = R^2(1 - {k_1}^2).$$

従つて

$$\begin{split} \overline{OF} + \overline{OF'} &= \sqrt{(\overline{OF} - \overline{OF'})^2 + 4 \cdot \overline{OF} \cdot \overline{OF'}} \\ &= \sqrt{4R^2 {k_1}^2 \cos^2 \varphi_1 + 4R^2 (1 - {k_1}^2)} \\ &= 2R \sqrt{1 - {k_1}^2 \sin^2 \varphi_1}. \end{split}$$

之と(4)とを(6)に代入すると

$$\frac{d\varphi_1}{d\varphi} = \frac{2R}{R+\delta} \frac{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \varphi_1}}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

而してこゝに

$$\frac{2R}{R+\delta} = \frac{2}{1+k_1}$$

であるから、結局

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{1 + k_1}{2} = \frac{d\varphi_1}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \varphi_1}}$$
 (7)

なる式を得る.

(7) の両辺にある第一種楕円積分はその母数を異にする、これを比較して見ると

$$k_1 = \frac{1 - k'}{1 + k'}$$

からして

$$k' = \frac{1 - k_1}{1 + k_1}$$

従つて

$$k^2 = 1 - \left(\frac{1 - k_1}{1 + k_1}\right)^2 = \frac{4k_1}{(1 + k_1)^2}.$$

故に

$$\left(\frac{k}{k_1}\right)^2 = \frac{4}{k_1(1+k_1)^2} > 1,$$

依つて

$$0 < k_1 < k$$

である. 即ち (7) は第一種楕円積分を同じ形で更に小なる母数のものに帰着せしめられることを示すもので、こゝに新旧両変数の関係は (5) の通りである. 換言すれば、(7) の左辺に於て (5) なる変換を行へば更に小なる母数の右辺を得るのである、此変換を Landen **の変換**といふ.

(5) はまた次の如くに書き直される.

$$k_1 = \frac{\sin(2\varphi - \varphi_1)}{\sin \varphi_1},$$

依つて

$$k' = \frac{1 - k_1}{1 + k_1} = \frac{\sin \varphi_1 - \sin(2\varphi - \varphi_1)}{\sin \varphi_1 + \sin(2\varphi - \varphi_1)} = \frac{2\sin(\varphi_1 - \varphi)\cos \varphi}{2\sin \varphi\cos(\varphi_1 - \varphi)}.$$

故に

$$\tan(\varphi_1 - \varphi) = k' \tan \varphi. \tag{8}$$

この方が(5)よりも実際には便利である.

Landen の変換を応用して実際に第一種楕円積分を計算することは次節に譲ることとし、こゝで序に上記の理論の副産物として sn 函数の加法公式を導くことを述べよう、但し大綱だけである、途中の計算は読者に一任する.

(3) は φ と φ' との間の微分方程式である.併し又別に微分を用ゐざる関係も見出される.それには次の様にすればよい.

C からに FF' 下した垂線の足を f とすれば,

$$\overline{FT} + \overline{F'T} = 2 \cdot \overline{Ff} = 2R \sin(\varphi' - \varphi),$$

$$\overline{FT} - \overline{F'T} = 2 \cdot \overline{fT} = 2\delta \sin(\varphi' + \varphi).$$

之から

$$\frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} + \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi'}}{\sin(\varphi' - \varphi)} = \frac{1 + \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}$$

$$\frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} - \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi'}}{\sin(\varphi' + \varphi)} = \frac{1 - \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}$$

を得る, $C > C \alpha$ は $\varphi = 0$ なるときの φ' の値とする. 此二式から

$$\frac{\sin^2 \varphi' - \sin^2 \varphi}{\sin \varphi' \cos \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} + \sin \varphi \cos \varphi' \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi'}} = \sin \alpha \tag{9}$$

を得る,これ即ち φ,φ' の間の一つの関係で丁度微分方程式 (3) の解に相当するものである (α は積分常数).

こゝに於て

$$v = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \ u = \int_0^{\varphi'} \frac{d\varphi'}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi'}}$$

と置けば、(3) の一解は $u-v=C_1$ (常数) で、又 (9) は

$$\frac{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 v}{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u} = C_2(常数)$$

となる. これらの二つの解を比較することによつて

$$\operatorname{sn}(u-v) = \frac{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 v}{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}$$
$$= \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v - \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}.$$

21. 第一種実楕円積分の計算

Landen の変換を利用すれば第一種実楕円積分の標準形(母数が 0 < k < 1 なるもの)の数値を簡便に計算することが出来る.

前節に述べた通り、 φ, φ_1 の間に

$$\tan(\varphi_1 - \varphi) = k' \tan \varphi \tag{1}$$

なる関係があるときは,

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{1 + k_1}{2} \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \varphi_1}}$$
(2)

でこゝに

$$k_1 = \frac{1 - k'}{1 + k'} < k \tag{3}$$

である. 今 φ から φ_1 に移つたと同様に φ から φ_2 , φ_2 から φ_3 , 等逐次に変換を行へば, 一般に

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{1 + k_1}{2} \frac{1 + k_2}{2} \cdot \dots \cdot \frac{1 + k_n}{2} \int_0^{\varphi_n} \frac{d\varphi_n}{\sqrt{1 - k_n^2 \sin^2 \varphi_n}}, \quad (4)$$

但しこゝに

$$\tan(\varphi_i - \varphi_{i-1}) = k_{(i)} \tan \varphi_{i-1} \quad (i = 1, 2, \dots, n; \ \varphi_0 = \varphi),$$

$$k_i = \frac{1 - k'_{i-1}}{1 + k'_{i-1}} < k_{i-1} \quad (i = 1, 2, \dots, n; \ k_0 = k)$$

なる関係がある.

 k_i は i が大なるに従つて次第に小さくなるのみならず実は限りなく 0 に近くなるのである(すぐ次に証明する),故に (4) に於て物が十分大なるときには右辺の積分を級数によつて計算してもよし (第 9 節参照) 或は被積分函数の中で近似的に $k_n=0$ と置いて

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{1 + k_1}{2} \frac{1 + k_2}{2} \cdot \dots \cdot \frac{1 + k_n}{2} \varphi_n \tag{5}$$

として計算しても宜い。何れにしても、与へられた k から出発して順次に k_1, k_2, \cdots を算出しなければならぬが、一々 (3) に依るのでは非常に面倒であるから茲に次の如き工夫を用ゐる。

今二つの正数 a,b (a>b) をとつて

$$k' = \frac{b}{a}$$

と置けば.

$$k_1^{\prime 2} = 1 - \left(\frac{1-k^{\prime}}{1+k^{\prime}}\right)^2 = 1 - \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 = \frac{4ab}{(a+b)^2}.$$

依つてこゝに

$$a_1 = \frac{a+b}{2}, \ b_1 = \sqrt{ab}$$

と置けば,

$$k_1' = \frac{b_1}{a_1}$$

となる. 同様の計算を繰り返せば

a,b は相異なる正数であるから、その逐次の相加平均及び相乗平均として作られる a_n,b_n 等もすべて相異なり、且その間に

$$b_{n-1} < b_n < a_n < a_{n-1}$$

なる関係が成立する. 而も a_n は a_{n-1} と b_{n-1} との相加平均であるから

$$a_n - b_n < a_n - b_{n-1} = \frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{2}.$$

従つて一般に

$$a_n - b_n < \frac{a - b}{2}$$

である. 故に

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = M$$

なる有限確定値が存在する. 之に依つてまた

$$\lim_{n \to \infty} k_n' = 1, \ \lim_{n \to \infty} k_n = 0$$

なることも判る.

さて上の方法で k_1', k_2', \cdots は容易に出せるが、(4) 又は (5) の計算に於て実際に必要なのは $(1+k_1)(1+k_2)\cdots(1+k_n)$ である.ところが此所にまた次の様な都合の良い関係がある.

$$1 + k_1 = 1 + \sqrt{1 - k_1'^2} = 1 + \sqrt{1 - \frac{4ab}{(a+b)^2}} = \frac{2a}{a+b} = \frac{a}{a_1}.$$

同様にして

$$1 + k_2 == \frac{a_1}{a_2}, \dots, 1 + k_n = \frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

故に

$$(1+k_1)(1+k_2)\cdots(1+k_n) = \frac{a}{a_n} \to \frac{a}{M}$$

である. (5) に此結果を入れれば

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{a}{a_n} \frac{\varphi_n}{2^n} \tag{6}$$

となる. そこで次には $\frac{\varphi_n}{2n}$ が問題となる.

元来 φ と φ_1 との関係は前節の図(54 頁)でわかる通り, φ_1 は φ と共に単調に増し大体に於て 2φ に近いもので,下表の如き値をとる.

即ち

$$|2\varphi - \varphi_1| < \pi$$
, 従つて $\left| \varphi_1 - \frac{\varphi_1}{2} \right| < \frac{\pi}{2}$.

 φ_1, φ_2 の関係も全く同様であるから

$$\left| \varphi_1 - \frac{\varphi_2}{2} \right| < \frac{\pi}{2}$$
, 従つて $\left| \frac{\varphi_1}{2} - \frac{\varphi_2}{2^2} \right| < \frac{\pi}{4}$

次第にかくの如くして一般に

$$\left| \frac{\varphi_{n-1}}{2^{n-1}} - \frac{\varphi_n}{2^n} \right| < \frac{\pi}{2^n}$$

を得る. 之に依つて

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\varphi_n}{2^n} = \Phi$$

なる極限値の存在を知る. そこで (6) に於て $n \to \infty$ とすると次の結果を得る,

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{a}{M} \Phi.$$

 Φ を算出するには別に便法はないが,(1) によつて逐次に $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ を計算すると k_n' が直きに 1 に近くなるので $\frac{\varphi_n}{2^n}$ は案外に早く一定の値(即ち Φ)に近づくものである.

特に $\varphi = \frac{\pi}{2}$ なるときは

$$\varphi_1 = \pi, \ \varphi_2 = 2\pi, \ \cdots, \ \varphi_n = 2^{n-1}\pi, \ \cdots,$$

従つて

$$\Phi = \frac{\pi}{2}$$
.

故に

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{a}{M}\frac{\pi}{2}.$$

同様にして K' も計算される.

例 $k=\frac{24}{25}$ なるとき K を計算すること. 此場合には $k'=\frac{7}{25}$ であるから,

$$a=25,\ b=7$$

と置けば,

 $a_1 = 16.00000$ $b_1 = 13.22876$ $a_2 = 14.61438$ $b_2 = 14.54854$ $a_3 = 14.58146$ $b_3 = 14.58142$ $a_4 = 14.58144$ $b_4 = 14.58144$

依つて M=14.58144 として

$$\frac{a}{M}\frac{\pi}{2} = 2.69314.$$

第三章 Weierstrass の楕円函数

22. 記号及び規約

前に述べた如く、一般に楕円函数といへば一価解析函数で二重週期を有し且無限遠 点以外に於て到る所有理型なるものを総称するのである。第二章で研究した sn, cn, dn 等は何れも楕円函数であるが、これは楕円積分の逆として導入されたのである。今度 は吾々は少し立場を変へて、先づ楕円函数なるものは一般に如何なる性質を有すべき かを考へ、それによつて最簡単なる一つの楕円函数を作成することを試みようと思ふ。

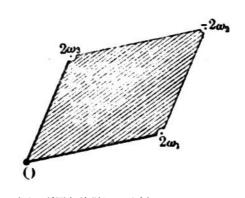
便宜上これから後に用ゐる記号を次の如くに一定して置く.

習慣上楕円函数の変数はuなる文字で表すこととし、その一対の基本週期を常に $2\omega_1, 2\omega_3$ で表す、2なる因数を附けたのは半週期を考へる必要が屡あるからである。原点と点 $2\omega_1$ 及び $2\omega_3$ とを夫々結ぶ線分を二辺とする平行四辺形は即ち前に述べた基本週期平行四辺形で、その原点に対する頂点を $-2\omega_2$ で表すことに定める、故に

$$-2\omega_2 = 2\omega_1 + 2\omega$$
 即ち $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$

なる関係が成立する。三点 $0,2\omega_1,2\omega_3$ は一直線上にはないから, $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ は実数ではない,即ちその虚部 $\Im\left(\frac{\omega_3}{\omega_1}\right)$ は正又は負であるが吾々はこれを正ならしめるやうに ω の添数 1,3 を附けるものとする。 $\Im\left(\frac{\omega_3}{\omega_1}\right)>0$ ならしめるといふことは三点 $0,2\omega_1,2\omega_3$ を此順序に一周する向きが丁度時計の針の廻転と反対の向きになることである,証明は容易であるから略す.

週期平行四辺形の限界に関しては次の如く規約する。四点 $0,2\omega_1,-2\omega_2,2\omega_3$ を頂点とする平行四辺形(その他の平行四辺形に於ても之に準する)に於ては,両端を除いた二辺 $(0,2\omega_1)$ 及び $(0,2\omega_3)$ 及び頂点 0 は此平行四辺形に属し,他の二辺及び三頂点は之に属せざるものとする,斯く定めれば之と合同なる平行四辺形を上下左右に並べたとき重複もなく隙間もなく全平面を蔽ふことが出来る。



(周の所属を誇張して示す) 第27図

23. 楕円函数の一般性質

f(u) を楕円函数とすれば

$$f(u + 2\omega_i) = f(u), \quad (i = 1, 3).$$

従つて

$$f'(u+2\omega_i) = f'(u), \quad (i=1,3)$$

で、又 f'(u) は点 ∞ 以外に於ては明かに有理型である. 故に

定理 1. 楕円函数の導函数はもとと同じ二重週期を有する楕円函数である.

次の定理も亦楕円函数の定義から直ちに出る.

定理 2. f(u) 及び g(u) を同じ週期平行四辺形に属する二つの楕円函数とすれば、

$$f(u) \pm g(u), \quad f(u)g(u), \quad \frac{f(u)}{g(u)}$$

等も亦同じ平行四辺形に属する楕円函数である.

系 常数を係数とする f(u) の有理函数も亦然り.

こゝに"平行四辺形に属する"といふ意味を説明して置く。今例へば平行四辺形の四つの頂点を $0,2\omega_1,-2\omega_2,2\omega_3$ とすれば、之に属する函数とはとにかく $2\omega_1,2\omega_3$ を週期とする(必ずしも基本週期でなくも宜い)函数のことである。故に、例へば、 $\sin u$ は0,4K,4(K+iK'),4iK'を頂点とする平行四辺形に属するものともいはれる。定理2に於けるf(u),g(u)は必ずしも同じ基本週期を有する事を要せぬのである。

定理 3. 二重週期を有し且整函数なるものは常数に限る.

何となれば、今 f(u) が二重週期を有して且整函数であるとすれば、一つの週期平行四辺形に於て f(u) は正則である、従つてそれは有界である。然すればすべての週期平行四辺形に於ても同様であるから、結局 f(u) は数平面上に於て無限遠点を除く他は到る所正則且有界である。依つて一般函数論に於ける Liouville の定理により f(u) は常数でなければならぬ。

系 1. 一つの週期平行四辺形内で到る所正則なる楕円函数は常数に限る.

一つの週期平行四辺形内にある極の位数の和を称してその楕円函数の**位数**といる. 依つて系1は次の如くに換言される.

系 2. 第零位の楕圏函数は常数である.

又一方に於て有限なる極の集積点(真性特異点)は有り得ないのであるから位数が無限大といふことはない.故に楕円函数の位数は必ず有限なる正の整数である.

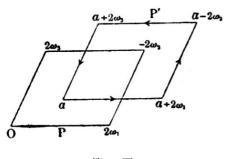
なほ次の二つの系は屡応用される重要なるものである.

系 3. 同一の平行四辺形に属する二つの楕円函数のすべての極及びその極に於ける展開式の主部が夫々相一致するならば、両函数は常数だけの差を有するものである.

両函数の差を考へて系1を適用すれば容易に証明される.

系 4. 同一の平行四辺形に属する二つの楕円函数のすべての極及び零点が(位数まで 考に入れて)夫々相一致するならば、両函数は常数因数だけて相異なるものである.

両函数の商を考へて系1を適用すれば容易に証明される.



第28図

さて次に述べる定理 4, 5, 6 では複素函数論に於ける留数に関する定理を応用するために楕円函数 f(u) 又は之に関聯する函数を一つの週期平行四辺形 (P) の周に沿うて積分する必要がある,依つて其積分路上に被積分函数の極があつては困るから其様な場合には予じめ適当に P を平行移動せしめて極を避けることとし,そのときの平行四辺形 (P') の頂点を

63

$$a$$
, $a+2\omega_1$, $a-2\omega_2$, $a-2\omega_3$

で表すこととする. (*a* を適当にとれば周上に極がない様に出来ることは次の何れの場合についても容易に証明が出来る. 之は読者に委せる.)

そこで先づ次の積分を考へる.

$$\int_{(P')} f(u) \, du = \int_{a}^{a+2\omega_1} + \int_{a+2\omega_1}^{a-2\omega_2} + \int_{a-2\omega_2}^{a+2\omega_3} + \int_{a+2\omega_3}^{a}.$$

然るに f(u) の週期性によつて明かに

$$\int_{a}^{a+2\omega_{1}} + \int_{a-2\omega_{2}}^{a+2\omega_{3}} = 0, \quad \int_{a+2\omega_{1}}^{a-2\omega_{2}} + \int_{a+2\omega_{3}}^{a} = 0.$$

故に

$$\int_{(P')} f(u) \, du = 0.$$

一方から考へれば此積分の値は P' 内にある f(u) のすべての極の留数の和,従つてまた P 内にある極の留数の和の $2\pi i$ 倍に等しい筈である.依つて次の定理を得る.

定理 4. 楕円函数の一つの週期平行四辺形内にあるすべての極の留数の和は 0 である.

系 第一位の楕円函数なるものは有り得ない.

何となれば若しかくの如き函数 f(u) ありとすれば、それは週期平行四辺形内に一位の極(例へば b とする)唯一箇を有するものである。その極に於ける展開式の主部を

$$\frac{A}{u-b}$$
 $(A \neq 0)$

とすれば,

$$\int_{(P')} f(u) du = 2\pi i A \neq 0.$$

これ定理4に反する.

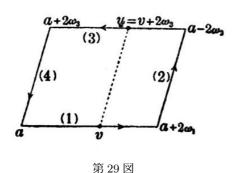
次に f(u) が楕円函数なるとき $\frac{f'(u)}{f(u)}$ も亦楕円函数なることは定理 1, 2 によつて明かである. 依つて定理 4 により

$$\int_{(D')} \frac{f'(u)}{f(u)} \, du = 0$$

となる. 然るに函数論でよく知られる通り此積分の値は P' 内にある f(u) の零点の位数の和から極の位数の和を減じた差の $2\pi i$ 倍に等しい. 依つて、次の定理を得る.

定理 5. 楕円函数の一つの週期平行四辺形内にある零点の位数の和と極の位数の和と は相等しい.

系 第n位の楕円函数は一つの週期平行四辺形内に於て任意の値をn回づゝ取る.



何となれば f(u) が楕円函数ならば,任意の常数 c に対して f(u)-c も亦楕円函数である.従つて一つの平行四辺形内で $f(u)-c=\infty$ 即ち f(u)=c なる回数と f(u)-c=0 即ち f(u)=c なる回数とは相等しい.次には更に一歩進んで

$$\int_{(P')} u \frac{f'(u)}{f(u)} \, du$$

なる積分を考へる、f(u) は矢張り楕円函

数とする. 平行四辺形の辺を図の如く (1),(2),(3),(4) と名づけると

$$\int_{(P')} = \int_{(1)} + \int_{(2)} + \int_{(3)} + \int_{(4)}.$$

さてこゝで

$$\int_{(3)} = \int_{a-2\omega_2}^{a+2\omega_2} u \frac{f'(u)}{f(u)} du$$

$$= \int_{a+2\omega_1}^{a} (v+2\omega_3) \frac{f'(v+2\omega_3)}{f(v+2\omega_3)} dv$$

$$= -\int_{a}^{a+2\omega_1} (v+2\omega_3) \frac{f'(v)}{f(v)} dv$$

$$= -\int_{a}^{a+2\omega_1} v \frac{f'(v)}{f(v)} dv - 2\omega_3 \int_{a}^{a+2\omega_1} \frac{f'(v)}{f(v)} dv$$

$$= -\int_{(1)}^{a} -2\omega_3 \{\log f(a+2\omega_1) - \log f(a)\}.$$

 $C > lc f(a + 2\omega_1)$ と f(a) とは週期性によつて勿論相等しいが,それらの log は必ずしも相等しくはない.何となれば f(u) の u が a から (1) に沿うて $a + 2\omega_1$ に行く間に f(u) は原点の回りを幾周かするかも知れぬ,もし仮りに k 周(正の向きに計る)するとすれば

$$\log f(a+2\omega_1) - \log f(a) = 2k\pi i$$

となる. 然すれば

$$\int_{(1)} + \int_{(3)} = -2\omega_3 \cdot 2k\pi i$$

である. 全く同様の計算により

$$\int_{(2)} + \int_{(4)} = -2\omega_1 \cdot 2h\pi i \quad (h \text{ は一つの整数}).$$

依つて結局

$$\int_{(P')} = 2\pi i (2h\omega_1 - 2k\omega_3) = 2\pi \times (一つの週期)$$

24. ρ 函数 **65**

となる.然るにまた函数論によれば此場合の左辺の積分の値は P' 内にある f(u) の零点の和と極の和(何れも位数だけに重複して加へる)との差の $2\pi i$ 倍に等しい.依つ て次の定理を得る.

定理 6. 楕円函数の一つの週期平行四辺形内にある零点の和と円の和との差は一つの 週期に等しい.

但して、にいふ週期は必ずしも基本週期ではないことに注意を要する.

以上の諸定理の中で,定理 3, 4, 5, 6 を夫々 Liouville **の第一,第二,第三,第四の 定理**と呼ぶことがある.

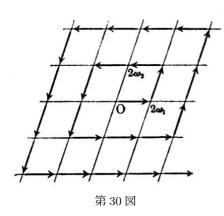
24. Ø函数

前章に述べた sn 等の楕円函数に於ては其一対の基本週期(例へば 4K, 2iK')は共に 母数 k の函数であるから相互に或る関係を以て結び付けられてゐる.故に任意の一対 の基本週期を与へたとき之をもつ様な sn 函数は必ずしも仔在しない.併し sn 等の既 知の函数でなくともとにかく楕円函数で任意に与へられた一対の基本週期($2\omega_1$, $2\omega_3$)をもつものはないかといふと,それは有る,但し"任意に与へる"といつても $\Im\left(\frac{\omega_3}{\omega_1}\right)$ なる条件は満足するものと考へること勿論である.

今, 斯様な楕円函数の一つを次の式によつて作らうとする.

$$f(u) = \sum \frac{1}{(u-w)^m},$$

$$(w = 2h_1\omega_1 + 2h_3\omega_3; h_1, h_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$



 $C > Toolean h_1, h_3$ は各独立にすべての整数値をとるから w はすべての週期点を表すことになる,今後当分の間は w を常に此意味に用ゐる.それから上式於ける \sum なる求和の順序は w=0 から出発して図の如く螺旋的に大体に於て次第 $|\omega|$ の大なる値に進むものとする.

数平面上に於て何れのwをも含まざる任意の閉面分をGとする.変数uがGにあるとき若し上記の級数が一様収斂な

らば f(u) は u の正則函数である. 次にさうなる様に m の値を定めよう.

u は G 内に限られて居るから |u| < M なる一定の正数 M を定めることが出来る,又 |w| は限りなく増大するから遂には |w| > M となる,而して

$$|u - w| \ge |w| - |u| > |w| - M.$$

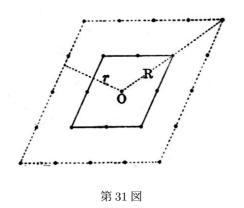
故に

$$\sum \frac{1}{(|w| - M)^m} \tag{1}$$

が収斂ならば Weierstrass の定理により

$$\sum \frac{1}{(u-w)^m}$$

は絶対且一様収斂で、吾々の求める m の値を得る.



さて (1) が収斂するときは

$$\sum' \frac{1}{|w|^m} \tag{2}$$

も収斂する. 但してゝに \sum' といふのはwのあらゆる値の中w=0だけ除いて其他をすべて加へ合すことを表す, 記号は今後常にこの意味で用ゐる. (w=0としては一つの分母が0になつて不都合である).

(2) なる級数に於ける最初の八項は図の

如く一つの平行四辺形の周上に並んでゐる。原点から此周に至る最小及び最大の距離を夫々r,Rとすれば、今考へる八項だけの和(之を s_1 とする)については

$$\frac{8}{R^m} < s_1 < \frac{8}{r^m}$$

なる関係が成立する。同様に考へると、次の十六項(前の平行四辺形の外側を囲む一側大きい平行四辺形の周上に並ぶ)の和を s_2 とすれば

$$\frac{16}{(2R)^m} < s_2 < \frac{16}{(2r)^m}$$

同様にして一般に

$$\frac{8n}{(nR)^m} < s_n < \frac{8n}{(nr)^m}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

である. これらの不等式を辺々相加へれば

$$\frac{8}{R^m}\sum \frac{1}{n^{m-1}} < \sum^{'} \frac{1}{|w|^m} < \frac{8}{r^m}\sum \frac{1}{n^{m-1}}.$$

さて級数 $\sum \frac{1}{n^{m-1}}$ は m-1>1 即ち m>2 なるときに限り収斂である. 故に m の最小なる整数値は 3 である.

さてこれで

$$f(u) = \sum \frac{1}{(u - w)^3}$$
 (3)

が数平面上w なる点以外に於て到る所正則なる函数を表すことは判つたが、之が楕円函数なることをいふには二重週期を有することと有理型なることを証明しなければならぬ。 依つて今試みに (3) に於てu の代りに $u+2\omega_1$ を入れて見ると

$$f(u+2\omega_1) = \sum \frac{1}{\{u - (w - 2\omega_1)\}^3}$$
 (4)

となる.然るに w はすべての週期の値をとるのであるから,w の全体と $(w-2\omega_1)$ の全体とは結局同一で,たゞ \sum の中にその現れる順序が違ふのみであるが,併し此級数は絶対収斂なるが故に項の順序は変つても差支ない.故に (4) の右辺とは相等しい,従つて

$$f(u+2\omega_1) = f(u).$$

即ち f(u) は $2\omega_1$ なる週期を有する.全く同様にして $2\omega_3$ なる週期を有することも証明される.厳密にいへば,これだけでは果して $(2\omega_1,2\omega_3)$ が <u>基本</u> 週期であるかどうか判らぬが,それは直ぐ次に述べることでわかる.さて次には有理型なることを確かめなければならぬが,既に証明した通り f(u) は w 以外の点では正則であるから,残る所の w なる点だけを調べればよい.今 w の一つを w_0 とし,

$$f(u) = \frac{1}{(u - w_0)^3} + \sum_{w \neq w_0} \frac{1}{(u - w)^3}$$

として見ると、右辺の \sum の部分は $u=w_0$ の十分小なる近傍に於ては一様収斂で従ってuの正則函数を表す、このことは前に(3)がGに於て一様収斂なることを証明したのと全く同様に証明される。故にf(u)は $u=w_0$ に於て極を有し、その主部は $\frac{1}{(u-w_0)^3}$ であることを知る、即ち此極は第三位である。

すべての $w=2h_1w_1+2h_2w_2$ なる点が極で、而してその他に極のないことから、 $(2\omega_1,2\omega_3)$ が基本週期なることも判る何となれば若し此週期が基本的でなくて更に細かい週期平行四辺形の網が出来るならばその各形内に夫々同様の極がある筈で、従つて w なる点以外にも極が無数に存在しなければならぬからである.

以上を総合すると、f(u) は第三位の楕円函数なることを知る。 序に f(u) が奇函数なることも (3) の式からわかる、何となれば w と同時に -w もすべての週期を表すから

$$f(-u) = \sum \frac{1}{(-u-w)^3} = -\sum \frac{1}{(u+w)^3}$$
$$= -\sum \frac{1}{(u-w)^3} = -f(u)$$

となること明かである.

これで任意の週期を有する楕円函数を作成する目的は達したのであるが、その位数の3なる所に少しく不満足を感ずる. 出来るだけ簡単な函数を得るために此位数をなるべく小さくしたい、併し前節の定理4の系によつて位数が1なることは不可能であるから、吾々は位数を2にすることを考へよう.

極の位数を下げるために屡用ゐられる一つの手段は積分することである.今前記の f(u) を 0 から任意の一点 u まで何れの w をも通らぬ路に沿うて積分しようとするの であるが,f(u) は 0 に於て既に極を有するので 0 を積分の下端とするのに都合が悪い から f(u) の代りに $f(u) = \frac{1}{13}$ を用ゐることにする,即ち

$$\int_0^u \left\{ f(u) - \frac{1}{u^3} \right\} du = \int_0^u \left\{ \sum' \frac{1}{(u-w)^3} \right\} du$$
$$= \sum' \int_0^u \frac{1}{(u-w)^3} du$$
$$= -\frac{1}{2} \sum' \left\{ \frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right\}.$$

依つて新たに

$$f_1(u) = \sum' \left\{ \frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right\}$$

と置けば、之はw以外では一様収斂級数でuの正則函数を表し、又u=wに於ては明かに第二位の極を有し、その主部は $\frac{1}{(u-w)^2}$ である。但しこゝでいふwは0以外の週

期のすべてを表すのであるが、もしw=0に於ても同様の性質の極を有する函数を求めるならば

$$f_2(u) = \frac{1}{u^2} + \sum' \left\{ \frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right\}$$

とすれば宜い. これですべての週期点に於て第二位の極を有することにはなつたが、 肝心の週期性を有して居るかどうか、之を調べなければならぬ. 其準備として先づ第 一に $f_2(u)$ のが偶函数なることを証明する. それは

$$f_2(-u) = \frac{1}{u^2} + \sum' \left\{ \frac{1}{(u+w)^2} - \frac{1}{w^2} \right\}$$
$$= \frac{1}{u^2} + \sum' \left\{ \frac{1}{[u-(-w)]^2} - \frac{1}{(-w)^2} \right\} = f_2(u)$$

で明かである. 第二には実際に微分して

$$f_2'(-u) = -\frac{2}{u^3} + \sum' \left\{ -\frac{2}{(u-w)^3} \right\}$$
$$= -2\left\{ \frac{1}{u^3} + \sum' \frac{1}{(u-w)^3} \right\} = 2\sum \frac{1}{(u-w)^3}$$
$$= -2f(u)$$

なる関係のあることを認める. さて f(u) は楕円函数であるから

$$f(u+2\omega_1) = f(u),$$

従つて

$$f_2'(u+2\omega_1) = f_2'(u).$$

之を積分すれば

$$f_2(u + 2\omega_1) = f_2(u) + C,$$

但しC は積分常数である. 之を決定するために $u=-\omega_1$ と置き, $f_2(u)$ が偶函数なることを利用すれば

$$f_2(\omega_1) = f_2(-\omega_1) + C = f_2(\omega_1) + C.$$

 $f_2(u)$ は u=w なる点にのみ極を有するのであるから $f_2(\omega_1)$ は有限値である.依つて上の結果から C=0 を得る,即ち

$$f_2(u+2\omega_1) = f_2(u).$$

これで $f_2(u)$ は $2\omega_1$ なる週期を有することを知る. $2\omega_3$ が週期なることも同様にして証明される. 故に $f_2(u)$ は第二位の楕円函数である.

この $f_2(u)$ は Weierstrass の楕円函数論に於て重要なる基本的の函数で,通常 $\wp(u)$ のなる記号で表される.即ち

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum' \left\{ \frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right\},$$

$$\wp'(u) = -2 \sum \frac{1}{(u-w)^3}.$$

これらの函数は何れも最初に定めた基本週期 $2\omega_1, 2\omega_3$ に関係するものであるから、もし之を明示する必要があるときには $\wp(u|2\omega_1, 2\omega_3), \wp'(u|2\omega_1, 2\omega_3)$ 等と書く.

24. ρ 函数 **69**

上来屡述べた如く $\wp(u)$ 及び $\wp'(u)$ は夫々第二位及び第三位の楕円函数で,且前者は偶函数,後者は奇函数である.

なほ上の定義から容易に得られる諸性質を次に列挙する.

(I) mを 0 ならざる任意の常数とすれば

$$\wp(mu|2m\omega_1, 2m\omega_3) = m^{-2}\wp(u|2\omega_1, 2\omega_3),$$

$$\wp'(mu|2m\omega_1, 2m\omega_3) = m^{-3}\wp(u|2\omega_1, 2\omega_3).$$

即ち \wp,\wp' は $u,-\omega_1,-\omega_3$ に関して夫々-2次及び-3次の同次函数である.

(II) $\wp(u)$ を u の冪級数に展開すれば

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + c_0 + c_1 u^2 + c_2 u^4 + \dots + c_n u^{2n} + \dots$$

なる形となること明かで、こゝに

$$c_0 = \left[\sum' \left\{\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right\}\right]_{u=0} = 0,$$

又 n >0 なるときは

$$c_n = \frac{1}{(2n)!} \left[\frac{d^{2n}}{du^{2n}} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right\} \right]_{u=0}$$
$$= (2n+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{w^{2n+2}}$$

である. 併し通常 c_1 及び c_2 の代りには夫々

$$g_2 = 20c_1 = 60\sum' \frac{1}{w^4},$$

 $g_3 = 28c_2 = 140\sum' \frac{1}{w^6}$

なる二数が用ゐられる. 即ち

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{20}u^2 + \frac{g_3}{28}u^4 + \cdots,$$

$$\wp'(u) = -\frac{2}{u^3} + \frac{g_2}{10}u + \frac{g_3}{7}u^3 + \cdots.$$

(III) 今得た両函数の展開式の各主部(即ち第一項)を消去する目的で $4\wp(u)^3 - \wp'(u)^2$ を作つて見ると

$$4\wp(u)^3 - \wp'(u)^2 = \frac{g_2}{u^2} + g_3 + (u^2以上の項)$$

となつて、なほの $\frac{1}{u^2}$ の項を有する. 依つて更に之から $g_2\wp(u)$ を減ずると

$$4\wp(u)^3 - \wp'(u)^2 - g_2\wp(u) = g_3 + (u^2以上の項)$$

となる. 此左辺は一つの楕円函数で、w 以外の点では正則である. 然るにまた右辺から考へると此函数は w=0 に於て正則である、それならば 0 と相合なるすべての週期点に於ても正則でなければならぬ. 結局この楕円函数は整函数であるといふことになる、従つてそれは常数でなければならぬ(前節の定理 3). その常数の値は u=0 と置いて見ると g_3 なることが判る. 依つて次の重要な公式(即ち $\wp(u)$ の満足する微分方程式)を得る.

$$\wp'(u)^2 = 4\wp(u)^3 - g_2\wp(u) - g_3.$$

(IV) $\wp(u) = z$ とすれば、今得た結果により

$$\frac{dz}{du} = \sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}.$$

而して u=0 は $z=\infty$ に対応するから

$$u = \int_{\infty}^{z} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}$$

なる関係がある.即ち $\wp(u)$ は斯くの如き形の第一種楕円積分の逆函数に当る(丁度 $\operatorname{sn} u$ が $u=\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$ の逆函数なる如くに).

注意 この積分の形を Weierstrass の第一種の標準形といふ. 之に対する第二種及び第 三種は夫々

$$\int \frac{zdz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}, \quad \int \frac{dz}{(z - a)\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}$$

である.

である.

(V) $\wp(u)$ は第二位であるから週期平行四辺形内に於てすべての値を各二度づゝとる(前節の定理 5, 系)従つて $\wp(u)$ の零点は一つの平行四辺形内に二つある筈であるが,其位置に関しては(二三の簡単なる場合の他は)今日なほ詳細なる性質が知られて居ないのを遺憾とする.

之に反して $\wp(u)$ の零点はよく知られて居る. 即ちその週期性によつて一般に

$$\wp'(u+2\omega_i) = \wp'(u) \quad (i=1,2,3)$$

であるから、こゝで $u = -\omega$ と置けば

$$\wp'(\omega_i) = \wp'(-\omega_i) = -\wp'(\omega_i).$$

而して ω_i は週期点でないから前の $\varrho'(\omega_i)$ は有限値である,故に

$$\wp'(\omega_i) = 0. \quad (i = 1, 2, 3)$$

即ち $\wp'(u)$ の零点は半週期の点にあるので,一つの週期平行四辺形に属するものは三つづゝある,例へば基本週期平行四辺形に属するものは ω_1 , $-\omega_2$, ω_3 である. $\wp'(u)$ は第三位の楕円函数であるから此三つの零点は各第一位でなければならぬ.

(VI) 今

$$\wp'(u)^2 = 4\wp(u)^3 - q_2\wp(u) - q_3.$$

この右辺を $\wp(u)$ に関して一次因数に分解し、その結果を

$$\wp'(u)^2 = 4\{\wp(u) - e_1\}\{\wp(u) - e_2\}\{\wp(u) - e_3\}$$

とする. さて、こゝで $u=\omega_i(i=1,2,3)$ と置いて見ると、 $\wp'(\omega_i)=0$ であるから

$$\wp(\omega_i) - e_1 = 0 \ \text{Z} \text{lt} \ \wp(\omega_i) - e_2 = 0 \ \text{Z} \text{lt} \ \wp(\omega_i) - e_3 = 0$$

でなければならぬ. 今仮りに $\wp(\omega_i) - e_1 = 0$ とすれば、これは第二位の 0 である、何となれば即 $\wp'(\omega_i) = 0$ で而して $\wp(u)$ は第二位の楕円函数だからである。同じく第二

25. 👂 函数の一例 71

位といふことからして、同じ ω_i に対して $\wp(\omega_i)-e_1=0$ と同時に $\wp(\omega_i)-e_2=0$ 又は $\wp(\omega_i)-e_3=0$ なることは不可能である。依つて三つの $\wp(\omega_i)(i=1,2,3)$ は一つづ > e_1,e_2,e_3 の何れかに等しいことが判る。e の番号の附け方については未だ何とも定めてなかつたから、こ > で更めて今後

$$\wp(\omega_1) = e_1, \quad \wp(\omega_2) = e_2, \quad \wp(\omega_3) = e_3$$

とすることに定める. これらの間には次の関係がある.

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0,$$

 $e_2e_3 + e_3e_1 + e_1e_3 = -\frac{1}{4}g_2, \quad e_1e_2e_3 = \frac{1}{4}g_3.$

(VII) 再び前の式

$$\wp'(u)^2 = 4\wp(u)^3 - g_2\wp(u) - g_3.$$

に戻つて、之をuで逐次に微分し、必要に応じては適宜に簡約すれば次の諸式を得る.

$$\wp''(u) = 6\wp(u)^2 - \frac{1}{2}g_2,$$

$$\wp'''(u) = 12\wp(u)\wp'(u),$$

$$\wp''''(u) = 120\wp(u)^3 - 18g_2\wp(u) - 12g_3,$$

一般に $\wp^{(n)}(u)$ は n が偶数のときは $\wp(u)$ の有理整式,n が奇数のときは $\wp(u)$ の有理整式と $\wp'(u)$ との積である(数学的帰納法).

(VIII) 今得た式の中

$$\wp'''(u) = 12\wp(u)\wp'(u).$$

をとつて、こゝに

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + c_1 u^2 + c_2 u^4 + \dots + c_n u^{2n} + \dots$$

を代入し、両辺に於ける u^{2n-3} の係数を比較し、その結果を整頓すれば次の式を得る.

$$(n-2)(2n+3)c_n = 3(c_1c_{n-2} + c_2c_{n-3} + \dots + c_{n-3}c_2 + c_{n-2}c_1).$$

之に依つて c_1, c_2 を用ゐて c_3, c_4, \cdots を逐次に算出することが出来る. 従つてまた $c_n (n \ge 3)$ はすべて g_2, g_3 の有理整式として表される. 例へば

$$c_3 = \frac{g_2^2}{1200}, \quad c_4 = \frac{3g_2g_3}{61600},$$

$$c_5 = \frac{49g_2^3 + 750g_3^3}{7644000}, \dots \xrightarrow{\text{FF}}.$$

25. 👂 函数の一例

sn 函数はその定義から見ても明かな如く正弦函数と多くの類似点をもつてゐるので親しみ易い感があるが、 p 函数は全くの新函数でよく様子が判らないといふ恐れがあると思はれるから、こゝに一つの簡単な場合をとつてその数値を調べて見よう.

先づ a を正の実数とし

$$2\omega_1 = 2a, \quad 2\omega_3 = 2ai$$

なる週期を有する ℘ 函数を考へる. この場合の週期平行四辺形は正方形である.

斯様な \wp 函数に於ては $g_3 = 0$ である,何となれば

$$g_3 = 140 \sum_{i=0}^{\prime} \frac{1}{w^6} = 140 \sum_{i=0}^{\prime} \frac{1}{[2a(m+ni)]^6} = \frac{35}{16a^6} \sum_{i=0}^{\prime} \frac{1}{(m+ni)^6}$$

 $\mathbb{C} > \mathbb{C} m, n$ は同時に 0 なる場合だけを除いて各あらゆる整数値をとるのである. 然るに一般に

$$\frac{1}{(m+ni)^6} + \frac{1}{(-n+mi)^6} = 0$$

であるから、上記の \sum' の中にある各項は二つづゝ互に消し合つて結局 $g_3=0$ となる. g_2 の方は 0 ではないが、併し

$$g_2 = 60 \sum_{i=1}^{\prime} \frac{1}{w^4} = \frac{15}{4a^4} \sum_{i=1}^{\prime} \frac{1}{(m+ni)^4}$$

に於て

$$\frac{1}{(m+ni)^4} + \frac{1}{(m-ni)^4} = ({\rm \not \! E}{\rm \not \! \! Z})$$

なることに注目すれば、とにかく g_2 は一つの実数なること明かである(その数値を実際に算出する方法は第四章に述べる).

依つて前節 (VIII) によつて c_n の値を計算すれば、次の展開式を得る.

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{20}u^2 + \frac{g_2^2}{1200}u^6 + \frac{g_2^3}{156000}u^{10} + \cdots$$
 (1)

此級数の係数はすべて実数で,又一般函数論で知られる通り此展開式は原点を中心とし之に最近い極を過る円即ち半径 2a なる円の内部で(厳密にいへばその円内から中心の一点を除いた環状面分で)通用する. 故に週期正方形の二辺 (0,2a),(0,2ai) 上に於ける $\wp(u)$ の値はすべて此式で計算される.

$$\wp(iu|2ai, -2a) = \wp(u|2a, 2ai).$$

然るに (2ai, -2a) を基本週期としても (2a, 2ai) を基本週期としても結局同じことであるから,

$$\wp(iu) = -\wp(u) \tag{2}$$

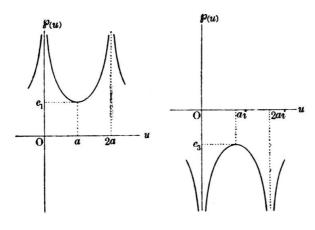
なる関係を得る (これは (1) の一般項の形を明かにして置けばそれからも証明される). 扨 $\wp(u)$ が偶函数なることとその週期性とにより

$$\wp(2a - u) = \wp(u).$$

故にuが0から2aまで実軸に沿うて変るとき、 $\wp(u)$ は ∞ から次第に減じてu=aなるときに極小となり(前節 (V) により $\wp'(a)=0$)その先きは前と対称的に次第に増して ∞ に至る。途中でu=aの他に極値がないことは、前節 (V) により $\wp'(u)$ の零点が0から2aまでの間ではaより他にない事から判る。ところで今いつた極小値 $\wp(a)$ は正でなければならぬ。何となれば若し之が0又は負であるとすれば辺(0,2a)上に

 $\wp(u)$ の零点が二つ(位数をも考へて)ある事になる.然らば (2) により,辺 (0,2ai) 上にも二つある事になり,結局 $\wp(u)$ は週期正方形内に少くとも四つの零点をもつことになる.之は $\wp(u)$ が第二位なる事に反する.

以上の結果により辺(0,2a)及び(0,2ai)上に於ける $\wp(u)$ のグラフは次の様になる.



第32図

注意 $4\wp(u)^3 - g_2\wp(u) = 0$ の根を求めれば

$$\begin{cases} e_1 &= \wp(a) = \frac{1}{2}\sqrt{g_2}, \\ e_2 &= \wp(\overline{1+ia}) = 0, \\ e_3 &= \wp(ia) = -\frac{1}{2}\sqrt{g_2} \end{cases}$$

 $g_2 > 0$ でなければならぬことが之から推定される.

26. ζ函数

前々節に於て f(u) から $f_2(u)$ を(即ち $\frac{1}{2}\wp'(u)$ から $\wp(u)$ を導いたのと同様の手段を 今一回

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum' \left\{ \frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right\}$$

に対して行へばすべての極の位数を1に下げることが出来る.併し第一位の楕円函数は存在しないから斯くして得る函数は最早楕円函数ではないことを覚悟しなければならぬ.とにかくその函数を作ること次の通り.

$$\int_0^u \left\{ \wp(u) - \frac{1}{u^2} \right\} du = \int_0^u \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right\} du$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^u \left\{ \frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right\} du$$
$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{u-w}{-w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2} \right\},$$

この負号を省けば、0 以外のすべての w 点において主部が $\frac{1}{u-w}$ なる一位の極を有する 函数を得る.依つて u=0 に於ても同様の極を有せしめる様に $\frac{1}{u}$ なる項を加へて、次

の如き新函数を作る.

$$\zeta(u) = \frac{1}{u} + \sum' \left\{ \frac{1}{u - w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2} \right\}. \tag{1}$$

之と $\wp(u)$ との関係は次の式で表される.

$$\zeta(u) = \frac{1}{u} - \int_0^u \left\{ \wp(u) - \frac{1}{u} \right\} du,
\wp(u) = -\zeta(u).$$
(2)

(1) から直ちに判る通り $\zeta(u)$ **は奇函数で、且** u, ω_1, ω_3 **に関して** -1 次の同次函数で**ある**. 又その展開式は $\wp(u)$ のそれから容易に導かれる、即ち次の如くである.

$$\zeta(u) = \frac{1}{u} - \frac{g_2}{60}u^3 - \frac{g_3}{140}u^5 - \frac{g_2^2}{8400}u^7 - \frac{g_2g_3}{18480}u^9 - \cdots$$

さて最初に断つてある通り $\zeta(u)$ は楕円函数ではないが、然らば u を $u+2\omega_1$ に変じたとき $\zeta(u)$ はどう変るか、次に之を研究する.

今

$$\zeta(u + 2\omega_1) = \zeta(u) + Z \tag{3}$$

と置けば、一般に Z は u と ω_1, ω_3 との函数と考ふべきである. (3) の両辺を u に関して微分すると、(2) により

$$-\wp(u+2\omega_1) = -\wp'(u) + \frac{\partial Z}{\partial u},$$

従つて

$$\frac{\partial Z}{\partial u} = 0.$$

故に Z は u には無関係で、 ω_1, ω_3 のみの函数である。依つて (3) に於て特に $u = -\omega_1$ と置いても Z には影響がないから、

$$\zeta(\omega_1) = \zeta(-\omega_1) + Z.$$

 $\zeta(u)$ は奇函数であるから $\zeta(-\omega_1) = -\zeta(\omega_1)$,且 ω_1 は w 点ではないから $\zeta(\omega_1)$ は有限値である,之を η_1 で表せば

$$\eta_1 = -\eta_1 + Z, \quad$$
従つて $Z = 2\eta_1.$

之を(3)に代入すれば次の公式を得る.

$$\zeta(u+2\omega_1) = \zeta(u) + 2\eta_1, \quad \eta_1 = \zeta(\omega_1).$$

この関係は ω_1 に限つたことではなく、一般に

$$\zeta(u+2\omega_i) = \zeta(u) + 2\eta_i, \quad \eta_i = \zeta(\omega_i) \quad (i=1,2,3)$$

なることが証明される. 更に之を結合すれば

$$\zeta(u + 2h_1\omega_1 + 2h_3\omega_3) = \zeta(u) + 2h_1\eta_1 + 2h_3\eta_3$$

となる, 茲に h_1, h_3 は任意の整数である. 特に $h_1 = h_3 = -1$ と置けば

$$\zeta(u - 2\omega_1 - 2\omega_3) = \zeta(u + 2\omega_2) = \zeta(u) - 2\eta_1 - 2\eta_3$$

27. σ 函数 75

となる. 之を (4) と比較すれば

$$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0 \tag{5}$$

なる関係を得る.

注意 $\zeta(u)$ は週期函数ではないが便宜上 $2\omega_1, 2\omega_3$ (一般には w) をその週期といふ.

次に,第 23 節で一般の楕円函数について定理 4 を得たのと同じ手続を $\zeta(u)$ に行つて見る, C> に P' なる平行四辺形は同節に於けると同じ意味を有するものとする.

$$\int_{(P')} \zeta(u) \, du = \int_{a}^{a+2\omega_1} + \int_{a+2\omega_1}^{a-2\omega_2} + \int_{a-2\omega_2}^{a+2\omega_3} + \int_{a+2\omega_3}^{a}$$

$$= 2\pi i.$$
(6)

此積分の値が $2\pi i$ なることは P' の中に $\zeta(u)$ の極が唯一つあつて其留数が 1 なること から直ちに知られる. さて (6) の右辺に於ける第三の積分に於て $u=v+2\omega_3$ なる置換を行へば

$$\int_{a-2\omega_2}^{a+2\omega_3} \zeta(u) \, du = \int_{a+2\omega_1}^{a} \zeta(v+2\omega_3) \, dv$$

$$= -\int_{a}^{a+2\omega_1} \left\{ \zeta(v) + 2\eta_3 \right\} dv$$

$$= -\int_{a}^{a+2\omega_1} \zeta(v) \, dv - 4\eta_3 \omega_1.$$

故に之と第一の積分とを相加へると

$$\int_{a}^{a+2\omega_{1}} + \int_{a-2\omega_{2}}^{a+2\omega_{3}} = -4\eta_{3}\omega_{1}.$$

同様に計算して

$$\int_{a+2\omega_1}^{a-2\omega_2} + \int_{a+2\omega_3}^{a} = +4\eta_1\omega_3.$$

依つて(6)から

$$\eta_1 \omega_3 - \eta_3 \omega_1 = \frac{\pi i}{2} \tag{7}$$

なる式を得る. これを Legendre **の関係式**といふ. (5) 及び $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$ なる関係 を利用すれば、(7) は

$$\eta_2 \omega_1 - \eta_1 \omega_2 = \frac{\pi i}{2}, \quad \eta_3 \omega_2 - \eta_2 \omega_3 = \frac{\pi i}{2}$$

等と書き直される.

27. σ **函数**

さて $\wp(u)$ から $\zeta(u)$ のを導いたと同様の手段を更に $\zeta(u)$ に行つて見よう.

$$\int_0^u \left\{ \zeta(u) - \frac{1}{u} \right\} du = \int_0^u \sum' \left\{ \frac{1}{u - w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2} \right\} du$$
$$= \sum' \left\{ \log \frac{u - w}{-w} + \frac{u}{w} + \frac{u^2}{2w^2} \right\}.$$

今度は log が出て来たから之を消すために全体の指数函数を作ると

$$\exp\sum'\left\{\log\frac{u-w}{-w}+\frac{u}{w}+\frac{u^2}{2w^2}\right\}=\prod'\left\{\left(1-\frac{u}{w}\right)e^{\frac{u}{w}+\frac{u^2}{2w^2}}\right\}.$$

此無限乗積で表される u の函数は 0 以外の w なる点で一位の零点を有する.もし u=0 に於ても一位の零点を有せしめようとするならば之に u なる因数を乗じて置けばよい.依つてz>に

$$\sigma(u) = u \prod' \left\{ \left(1 - \frac{u}{w} \right) e^{\frac{u}{w} + \frac{u^2}{2w^2}} \right\} \tag{1}$$

なる新函数を作る.

以上の成り行きから明かな通り、 $\sigma(u)$ と $\zeta(u)$ との間には次の関係がある.

$$\sigma(u) = u \exp\left[\int_0^u \left\{ \zeta(u) - \frac{1}{u} \right\} du \right],$$

$$\log \sigma(u) = \log u + \int_0^u \left\{ \zeta(u) - \frac{1}{u} \right\} du,$$

$$\zeta(u) = \frac{d}{du} \log \sigma(u) = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}.$$
(2)

 $\sigma(u)$ は今までの $\wp(u)$ や $\zeta(u)$ と違つて u=w なる点に於て極を有しない,また w 以外の有限点では勿論正則であるから,結局 $\sigma(u)$ は整函数である.従つてそれは楕円 函数ではない.なほ $\sigma(u)$ が奇函数なること,及び

$$\lim_{u \to 0} \frac{\sigma(u)}{u} = 1$$

なること等は(1)から直ちに判る.依つて

$$\sigma(u) = u + c_3 u^3 + c_5 u^5 + \cdots$$

と置いて (2) の右辺に入れ、前節に得た $\zeta(u)$ の展開式と比較すれば

$$e_3 = 0$$
, $e_5 = -\frac{g_2}{240}$, $e_7 = -\frac{g_3}{840}$, \cdots

等の値を得る.

次には週期に対する性質を調べる,但し上述の如く $\sigma(u)$ は楕円函数ではなく真の意味に於ける週期なるものは存在しないが,従来の $2\omega_1,2\omega_3$ (一般には w) のことを矢張り $\sigma(u)$ の週期と呼ぶのである.

 $\zeta(u)$ に関しては前節で知れる如く

$$\zeta(u+2\omega_1) = \zeta(u) + 2\eta_1$$

なる公式が成立する. この両辺をuに関して積分すれば、(2)により、

$$\log \sigma(u + 2\omega_1) = \log \sigma(u) + 2\eta_1 u + c \quad (c \text{ は常数})$$

を得,従つて

$$\sigma(u+2\omega_1) = Ce^{2\eta_1 u}\sigma(u) \quad (C 常数)$$

なることを知る. C を決定するために $u = -\omega_1$ と置けば

$$\sigma(\omega_1) = Ce^{-2\eta_1\omega_1}\sigma(-\omega_1) = -Ce^{-2\eta_1\omega_1}\sigma(\omega_1),$$

28. 楕円函数の表示 77

 $C > C \sigma(\omega_1) \neq 0$ であるから、之から $C = -e^{-2\eta_1}$ を得る. 従つて次の公式を得る、

$$\sigma(u+2\omega_1) = -e^{-2\eta_1(u+\omega_1)}\sigma(u). \tag{3}$$

同様に

$$\sigma(u + 2\omega_3) = -e^{-2\eta_1(u + \omega_1)}\sigma(u). \tag{4}$$

(3), (4) を反復して組合せれば更に一般なる次の公式を得る,証明は読者の演習として残す.

$$\sigma(u + 2h_1\omega_1 + 2h_3\omega_3) = (-1)^{h_1 + h_3}e^E\sigma(u),$$

但し

$$E = 2(h_1\eta_1 + h_3\eta_3)(u + h_1\omega_1 + h_3\omega_3) + 2h_1h_3(\eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1),$$

この最後の項は Legendre の関係式を利用すれば $h_1h_3\pi i$ することが出来る.

28. 楕円函数の表示

有理函数を式で書き表すのに次の二種の方法の何れかによると其性質がよく表示されて便利である。その一は因数分解式と称するもので

$$f(z) = C \frac{\prod\limits_{i=1}^{m}(z-b_i)}{\prod\limits_{i=1}^{n}(z-a_i)} \quad (C は常数)$$

の如く、その函数の極と零点とを明示したものである。他の一は部分分数式と称する もので

$$f(z) = C + \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{c_{i,1}}{z - a_i} + \frac{c_{i,2}}{(z - a_i)^2} + \dots + \frac{c_{i,k_i}}{(z - a_i)^{k_i}} \right\}$$
(C.c は常数)

の如く各の極に於ける展開式の主部を明示したものである.

楕円函数の表示式にも丁度これと同様の二種がある.

(I) 因数分解式に相当するもの

今 f(u) を楕円函数とし、その一つの週期平行四辺形内にある極及び零点を夫々その位数だけつつ重複して列記したものを a_1, a_2, \dots, a_n 及び b_1, b_2, \dots, b_n とすれば、第 23 節の定理 6 により

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n + w,$$

但しw は或る一つの週期である.そこで以下便宜上 b_n+w のことを単に b_n で表すことにする.然すれば正しく

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$
 (1)

となり、 b_n は矢張り一つの零点であるが一般には最初に考へた平行四辺形内には存在しない。 さてz に於て

$$\varphi(u) = \frac{\prod_{i=1}^{n} \sigma(u - b_i)}{\prod_{i=1}^{n} \sigma(u - a_i)}$$

なる函数を作ると、これは極及び零点が悉く f(u) のそれと一致してゐる。而してまた $\varphi(u)$ は $2\omega_1$ 及び $2\omega_3$ なる週期を有する、何となれば

$$\varphi(u+2\omega_1) = \frac{\prod_{i=1}^{n} \sigma(u-b_i+2\omega_1)}{\prod_{i=1}^{n} \sigma(u-a_i+2\omega_1)}$$
$$= \frac{(-1)^n e^{2\eta_1 \sum_{i=1}^{n} (u-b_i+2\omega_1)} \prod_{i=1}^{n} \sigma(u-b_i)}{(-1)^n e^{2\eta_1 \sum_{i=1}^{n} (u-a_i+2\omega_1)} \prod_{i=1}^{n} \sigma(u-a_i)}.$$

然るに(1)により依つて

$$\varphi(u+2\omega_1)=\varphi(u).$$

 $2\omega_3$ についても全く同様である.

之に依つて見ると $\varphi(u)$ は f(u) と同じ週期を有する楕円函数で,且その極及び零点が夫々相一致するものである.故に第 23 節定理 3,系 4 により,

$$f(u) = C \frac{\prod\limits_{i}^{n} \sigma(u - b_{i})}{\prod\limits_{i}^{n} \sigma(u - a_{i})}. \quad (C は常数)$$

(II) 部分分数式に相当するもの

前の如く楕円函数 f(u) の極を a_1, a_2, \dots, a_n とするが、今度は位数だけに重複して書くことにせず相異なる極のみを書いたとし、その位数を夫々 k_1, k_2, \dots, k_m とする. 更に又各極 $a_i(i=1,2,\dots,m)$ に於ける f(u) の展開式の主部を

$$\frac{A_{i,1}}{u - a_i} + \frac{A_{i,2}}{(u - a_i)^2} + \dots + \frac{A_{i,k_i}}{(u - a_i)^{k_i}}$$
 (2)

と考へる. 然すれば第23節定理4により

$$\sum_{i=1}^{m} A_{i,1} = 0 \tag{3}$$

である. さて既に知れる如く

$$\zeta(u) = \frac{1}{u} + \dots, \ \wp(u) = \frac{1}{u^2} + \dots, \ \wp'(u) = -\frac{2}{u^3} + \dots,$$
$$\dots, \ \wp^{(k_i - 2)}(u) = (-1)^{k_i} \frac{(k_i - 1)!}{u^{k_i}}$$

であるから、次の如き函数 $\varphi_i(u)$ を作れば丁度 a_i に於て (2) と同じ主部の極を有することになる.

$$\varphi_{i}(u) = A_{i,1}\zeta(u - a_{i}) + A_{i,2}\wp(u - a_{i}) - \frac{A_{i,3}}{2!}\wp'(u - a_{i}) + \dots + (-1)^{k_{i}}\frac{A_{i,k_{i}}}{(k_{i} - 1)!}\wp^{(k_{i} - 2)}(u - a_{i}).$$
(4)

依つて

$$\sum_{i=1}^{m} \varphi_i(u) \tag{5}$$

なる函数を作れば、これは f(u) とすべての極を共有するのみならすその各極に於ける 展開式の主部が悉く相一致するものである。ところで (5) は楕円函数であるかといふ に、 $\varphi_i(u)$ なるものの構造を見ると第二項以下は \wp 及びその逐次の導函数であるから 勿論楕円函数である,故に (5) が楕円函数なるか否かは畢竟

$$\sum_{i=1}^{m} A_{i,1} \zeta(u - a_i) \tag{6}$$

に関する同じ問題に帰する. そこで此式に於てuを $u+2\omega_1$ に変じて見ると

$$\sum_{i=1}^{m} A_{i,1} \zeta(u - a_i + 2\omega_1) = \sum_{i=1}^{m} A_{i,1} \left\{ \zeta(u - a_i + 2\eta_1) \right\}$$
$$= \sum_{i=1}^{m} A_{i,1} \zeta(u - a_i) + 2\eta_1 \sum_{i=1}^{m} A_{i,1},$$

この最後の項は (3) によつて 0 に等しい. 依つて (6) は,従つて (5) は, $2\omega_1$ なる週期をもつ. $2\omega_3$ についても同様. 故に (5) は楕円函数である. 然すれば第 23 節定理 3, 系 3 により,(5) は f(u) と常数だけの差を有するものである. 依つて

$$f(u) = C + \sum_{i=1}^{n} \left\{ A_{i,1} \zeta(u - a_i) + A_{i,2} \wp(u - a_i) - \frac{A_{i,3}}{2!} \wp'(u - a_i) + \dots + (-1)^{k_i} \frac{A_{i,k_i}}{(k_i - 1)!} \wp^{(k_i - 2)}(u - a_i) \right\}. \quad (C は常数)$$

(III) 楕円函数の積分の表示

序に (II) の結果から f(u) の積分を考へて見ると、先づ C の積分は u の一次式となり、 $\zeta, \wp, \wp', \wp'', \dots$ の積分は夫々 $\log \sigma, -\zeta, \wp, \wp', \dots$ となる.この中 \wp, \wp', \dots は畢竟一つの楕円函数を作るのであるから、総括すれば一般に楕円函数の積分は次の四種の函数から成立することが判る.

- (i) 一次函数, (ii) $\log \sigma$ 函数,
- (iii) ζ函数, (iv) 楕円函数.

29. ρ, ζ 及び σ 函数の加法公式

今 $\wp(u)-\wp(v)$ なる式に於て u を変数と考へ、v を週期に等しからざる常数とする. 然すれば此式は一つの楕円函数で、その極は 0,0 に、零点は v,-v にある. 故に前節の (I) なる表示式により

$$\wp(u) - \wp(v) = C \frac{\sigma(u - v)\sigma(u + v)}{\sigma(u)^2}$$

と置くことが出来る. この各辺を u の冪級数に展開すれば

$$\wp(u) - \wp(v) = \frac{1}{u^2} - \cdots,$$

$$C \frac{\sigma(u - v)\sigma(u + v)}{\sigma(u)^2} = C \frac{-\sigma(v) + \cdots}{(u + \cdots)^2} = -C \frac{\sigma(v)^2}{u^2} + \cdots.$$

故に両辺を比較して $C = -\frac{1}{\sigma(v)^2}$ を得る. 之を前の表示式に入れれば

$$\wp(u) - \wp(v) = -\frac{\sigma(u - v)\sigma(u + v)}{\sigma(u)^2 \sigma(v)^2} \tag{1}$$

となる,これは重要な公式である.但し上の証明ではvを仮りに常数としたのであるが,実は週期以外の値ならば何でもよいのであるから,(1)に於てはu,v共に変数と考へて宜い.(1)の両辺の対数をとり,之をu及びvに関して偏微分すれば次の式を得る.

$$\frac{\wp'(u)}{\wp(u) - \wp(v)} = \zeta(u - v) + \zeta(u + v) - 2\zeta(u),$$
$$\frac{-\wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)} = -\zeta(u - v) + \zeta(u + v) - 2\zeta(v).$$

之を辺々相加へれば

$$\zeta(u+v) = \zeta(u) + \zeta(v) + \frac{1}{2} \frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)}$$
(2)

なる結果を得る. 之を ζ 函数の加法公式といふ.

注意 第 16 節で述べた加法公式の定義によれば $\zeta(u+v)$ を $\zeta(u)$, $\zeta(v)$ のみで表さなければならぬ訳であるが,それは後に述べる如く実は不可能なので止むを得ず $\wp(u)$ 等を交へるのである.併し $\wp(u)=\zeta'(u)$ なることを利用すれば (2) の右辺は $\zeta(u)$, $\zeta(v)$ の及びその第二次までの導函数で表される.故に広義に於て之を ζ の加法公式といつてもよい訳である.

(2) の両辺を更に u で偏微分すれぼ次の式を得る.

$$\wp(u+v) = \wp(u) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)}.$$
 (3)

これ即ち。函数の加法公式である.

(3) の右辺に於ける微分を実行し、その結果を整理すれば

$$\wp(u+v) = \frac{2\{\wp(u)\wp(v) - \frac{1}{4}g_2\}\{\wp(u) + \wp(v)\} - g_3 - \wp'(u) - \wp'(v)}{\{\wp(u) - \wp(v)\}^2}.$$

となる. なほ共他種々な形に書き直すことが出来るが、その計算は読者の演習に委することとして、その一二の結果のみを此所に記して置く.

$$\wp(u+v) + \wp(u) + \wp(v) = \frac{1}{4} \left\{ \frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)} \right\}^2, \tag{4}$$

$$\begin{vmatrix} \wp(u) & \wp'(u) & 1 \\ \wp(v) & \wp'(v) & 1 \\ \wp(w) & \wp'(w) & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad 但し \quad u + v + w = (週期).$$
 (5)

注意 1. (5) は上来の諸式からも誘導されるが、次の方針で独立にも証明される.先づ (5) の左辺の行列式だけを考へ、w の代りに z なる変教を入れれば、この行列式は z に関する第三位の楕円函数である.而してその極は 0,0,0 にあり、零点の中二つは u,v である.故に残りの一つを w とすれば、第 23 節定理 6 により、u+v+w=0+0+0+(週期).これから直ちに (5) を得る.

30. 👂 函数の乗法公式 81

注意 2. \wp 函数の加法公式は $\wp(u+v), \wp(u), \wp(v), \wp'(u), \wp'(v)$ を含んでゐるが,既に知れる如く \wp'^2 は \wp の三次式で表されるから,結局加法公式は

$$R\{\wp(u+v),\wp(u),\wp(v)\}=0$$
 (R は有理整式)

なる形に書かれる. この性質を称して @ **函数は代数的加法公式を有する**といふ.

さて最後に σ 函数の加法公式を求めるのであるが、これも或る意味に於て広義のものしか出来ない。 先づA,B,C,D を任意の数とすると

$$(A - B)(C - D) + (A - C)(D - B) + (A - D)(B - C) = 0$$

か恒等式なることは明かである. そこで今特に

$$A = \wp(u), \quad B = \wp(u_1), \quad C = \wp(u_2), \quad D = \wp(u_3)$$

と置く,但し u, u_1, u_2, u_3 は各独立なる変数とする.前の(1) により

$$A - B = \wp(u) - \wp(u_1) = -\frac{\sigma(u + u_1)\sigma(u - u_1)}{\sigma(u)^2 \sigma(u_1)^2},$$

C-D, その他についても同様に計算し、それらを上の恒等式に入れ、分母を払へば次の式を得る.

$$\sigma(u+u_1)\sigma(u-u_1)\sigma(u_2+u_3)\sigma(u_2-u_3) + \sigma(u+u_2)\sigma(u-u_2)\sigma(u_3+u_1)\sigma(u_3-u_1) + \sigma(u+u_3)\sigma(u-u_3)\sigma(u_1+u_2)\sigma(u_1-u_2) = 0, \quad (6)$$

之を σ 函数の加法公式といる.

(6) に於て

$$u + u_1 = a$$
, $u - u_1 = b$, $u_2 + u = c$, $u_2 - u_3 = d$

と置けば、加法公式は次の形にも書かれる.

$$\sigma(a)\sigma(b)\sigma(c)\sigma(d) + \sigma(a')\sigma(b')\sigma(c')\sigma(d') + \sigma(a'')\sigma(b'')\sigma(c'')\sigma(d'') = 0,$$

但し
$$\begin{cases} a' = \frac{1}{2}(a+b+c+d) \\ b' = \frac{1}{2}(a+b-c-d) \\ c' = \frac{1}{2}(a-b+c-d) \\ d' = \frac{1}{2}(-a+b+c-d) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a'' = \frac{1}{2}(a+b+c-d) \\ b'' = \frac{1}{2}(a+b-c+d) \\ c'' = \frac{1}{2}(a-b+c+d) \\ d'' = \frac{1}{2}(a-b-c-d) \end{cases}$$

30. Ø 函数の乗法公式

既に \wp 函数の加法公式を知つて居るから、それによつて $\wp(2u)$ 、 $\wp(3u)$ 、···· 等を $\wp(u)$ で表すことが出来る筈であるがその評算は非常に面倒である。 試みに $\wp(2u)$ を求めて見よう。 80 頁 (4) に於て v=u と置くと右辺が不定形になるから、先づ

$$\lim_{v \to u} \frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)} = \lim_{v \to u} \frac{\wp''(v)}{\wp'(v)} = \frac{6\wp(u)^2 - \frac{1}{2}g_2}{\wp'(u)}$$

として、次の式を得る、従つて

$$\wp(2u) = \frac{1}{4} \frac{\left\{6\wp(u)^2 - \frac{1}{2}g_2\right\}^2}{4\wp(u)^3 - g_2\wp(u) - g_3} - \wp(2u)$$
$$= \frac{\wp(u)^4 + \frac{1}{2}g_2\wp(u)^2 + 2g_3\wp(u) + \frac{1}{16}g_2^2}{4\wp(u)^3 - g_2\wp(u) - g_3}.$$

これでは $\wp(3u)$ を求めるのすら容易でない,そこで次の様な工夫をする.

80 頁 (1) の公式に於て、u,v を夫々 nu,u と置く、但し n は自然数とする.

$$\wp(nu) - \wp(u) = -\frac{\sigma(\overline{n+1}u)\sigma(\overline{n-1}u)}{\sigma(nu)^2\sigma(n)^2}.$$
 (1)

之を更に変形するために今

$$\psi_n(u) = \frac{\sigma(nu)}{\sigma(u)^{n^2}}$$

と置けば、(1) は次の様になる.

$$\wp(nu) = \wp(u) - \frac{\psi_{n+1}(u)\psi_{n-1}(u)}{\psi_n(u)^2}.$$
 (2)

 \mathbf{c} > で $\psi_n(u)$ なる函数について老へて見る. 先づこれは u の楕円函数である, 試みに u に $2\omega_1$ を加へれば

$$\psi_n(u+2\omega_1) = \frac{\sigma(nu+2n\omega_1)}{\sigma(u+2\omega_1)^{n^2}}$$

$$= \frac{(-1)^n e^{2n\eta_1(nu+n\omega_1)}\sigma(nu)}{(-1)^{n^2} e^{2n2\eta_1(u+\omega_1)}\sigma(u)^{n^2}}$$

$$= \frac{\sigma(nu)}{\sigma(u)^{n^2}} = \psi_n(u).$$

さて $\psi_n(u)$ のは楕円函数であつて且 n が奇数ならば偶函数,偶数ならば奇函数である(証明は容易につき略す). 故に $\psi_n(u)$ は n が奇数ならば $\wp(u)$ の有理函数, n が偶数ならば $\wp(u)$ の有理函数に $\wp'(u)$ を乗じたものに等しい(之は次節で証明する). 次にその式を今少し詳しく調べよう.

先づnを奇数とする. $\psi_n(u)$ はその定義から直ちにわかる通り基本週期平行四辺形内ではu=0 に於てのみ極を有し、その位数は明かに n^2-1 である. 故に $\psi_n(u)$ を $\wp(u)$ で表せば、 $\wp(u) \to \infty$ なるときにのみ $\psi_n(u) \to \infty$ となるから、 $\wp(u)$ の有理整函数であつてその次数は $\frac{n^2-1}{2}$ でなければならぬ. 即ち

$$\psi_n(u) = c_0 \wp(u)^{\frac{n^2-1}{2}} + c_1 \wp(u)^{\frac{n^2-3}{2}} + \cdots$$

両辺をuの冪級数に展開し、その最低冪の項の係数を比較すれば $c_0=n$ なることを知る。故に

$$\psi_n(u) = n\wp(u)^{\frac{n^2-1}{2}} + \cdots$$

n が偶数なるときは $\psi_n(u)$ を $\wp'(u)$ で割つたものについて上と同様に考へれば、

$$\psi_n(u) = \wp'(u) \left\{ -\frac{n}{2}\wp(u)^{\frac{n^2-4}{2}} + \cdots \right\}$$

30. 👂 函数の乗法公式 83

なることが証明される.

依つて一般に

$$n$$
 が奇数なるときは $\psi_n(u) = P_n$, n が偶数なるときは $\psi_n(u) = \wp'(u)P_n$

と置くことにすれば、(2) は次の様になる.

n が奇数なるときは

$$\wp(nu) = \wp(u) - \frac{\wp'(u)P_{n+1}P_{n-1}}{P_n^2},\tag{3}$$

n が偶数なるときは

$$\wp(nu) = \wp(u) - \frac{P_{n+1}P_{n-1}}{\wp'(u)^2 P_n^2}.$$
(4)

之に依つて $\wp(nu)$ の式を求める問題は一般に P_n を求めることに帰着されたが、その P_n を求めるには次の如き方法による. m,n を二つの相異なる自然数とし、

$$\wp(mu) - \wp(u) = -\frac{\psi_{m+1}(u)\psi_{m-1}(u)}{\psi_m(u)^2},$$

$$\wp(nu) - \wp(u) = -\frac{\psi_{m+1}(u)\psi_{m-1}(u)}{\psi_m(u)^2}$$

辺々相減すれば(右辺では(u)を略す)

$$\wp(mu) - \wp(nu) = -\frac{\psi_{m+1}\psi_{m-1}\psi_n^2 - \psi_{n+1}\psi_{n-1}\psi_m^2}{\psi_m^2\psi_n^2}.$$
 (5)

一方に於て又82頁(1)によれば

$$\wp(mu) - \wp(nu) = -\frac{\sigma(\overline{m+n}u)\sigma(\overline{m-n}u)}{\sigma(mu)^2\sigma(nu)^2},$$

従つて

$$\wp(mu) - \wp(nu) = -\frac{\psi_{m+n}\psi_{m-n}}{\psi_n^2\psi_m^2}.$$
 (6)

(5) と(6) とを比較すれば次の関係を得る,

$$\psi_{m+n}\psi_{m-n} = \psi_{m+1}\psi_{m-1}\psi_n^2 - \psi_{n+1}\psi_{n-1}\psi_m^2.$$

特にm=n+1とすれば

$$\psi_{2n+1} = \psi_{n+2}\psi_n^3 - \psi_{n+1}^3\psi_{n-1}.$$

又m,nを夫々n+1,n-1とすれば

$$-\wp'(u)\psi_{2n} = \psi_n(\psi_{n+2}\psi_{n-1}^2 - \psi_{n+1}^2\psi_{n-2}).$$

この最後の二式を P に関する公式に直せば次の様になる.

$$P_{2n+1} = \begin{cases} P_{n+2}P_n^{\ 3} - \wp'(u)^4 P_{n+1}^{\ 3} P_{n-1} & (n は奇数) \\ \wp'(u)^4 P_{n+2}P_n^{\ 3} - P_{n+1}^{\ 3} P_{n-1} & (n は偶数) \end{cases}$$

$$P_{2n} = -P_n(P_{n+2}P_{n-1}^{\ 2} - P_{n+1}^{\ 2} P_{n-2}).$$

之に依つて $n \le 4$ なるときの P_n を知れば n > 4 なるときのはすべて算出される. $n \le 4$ なるときの P_n は実算によつて次の如くなることが知られる,

$$P_{1} = 1, \quad P_{2} = -1,$$

$$P_{3} = 3\wp(u)^{4} - \frac{3}{2}g_{2}\wp(u)^{2} - 3g_{3}\wp(u) - \frac{1}{16}g_{2}^{2},$$

$$P_{4} = -2\wp(u)^{6} + \frac{5}{2}g_{2}\wp(u)^{4} + 10g_{3}\wp(u)^{3} + \frac{5}{8}g_{2}^{2}\wp(u)^{2} + \frac{1}{2}g_{2}g_{3}\wp(u) + g_{3}^{2} - \frac{1}{32}g_{2}^{3}.$$

これから直ちに判る通り一般に

$$P_n = \sum C_{\lambda,\mu,\nu} g_2^{\lambda} g_3^{\mu} \wp(u)^{\nu}$$
 (C は有理常数)

 \mathcal{C} , $\mathcal{C} > \mathcal{C} \lambda, \mu, \nu$ \mathcal{C}

$$2\lambda + 3\mu + \nu = \begin{cases} rac{n^2 - 1}{2} & (n\, \mbox{が奇数のとき}) \\ rac{n^2 - 4}{2} & (n\, \mbox{が偶数のとき}) \end{cases}$$

なるあらゆる負ならざる整数値をとるものとする.

楕円函数の特性 31.

第28節に述べた楕円函数の部分分数的表示法によれば任意の楕円函数は次の四種 の函数の一次式として表される.

- (i) $\zeta(u-a)$, (ii) $\wp(u-a)$,
- (iii) $\wp'(u-a)$ 函数, (iv) $\wp''(u-a)$ 及び高次の導函数.

然るに (iv) は (ii) 及び (i) の有理整式として表される (第 24 節 (VII)). 而してその (ii) 及び (iii) は \wp の加法公式及びそれを微分した式を用ゐれば $\wp(u), \wp'(u), \wp(a), \wp'(a)$ で表される, しかし $\wp(a)$, $\wp'(a)$ は常数であるから, つまり $\wp(u)$, $\wp'(u)$ の有理函数に過 ぎぬ. 之を要するに、(ii)、(iii)、(iv) の部分はすべて $\wp(a)$ 、 $\wp'(a)$ の有理函数に書き直 される. さて残る所は (i) の部分, 即ち

$$\sum A\zeta(u-a)$$

なる形の式であるが、これを (の加法公式によつて変形すれば

$$\zeta(u) \sum A - \sum A\zeta(a) + \frac{1}{2}A \frac{\wp'(u) + \wp'(a)}{\wp(u) - \wp(a)}$$

となる. こゝで $\sum A = 0$ なることに注意すれば、この結果もまた $\wp(u),\wp'(u)$ の有理 函数に他ならぬことが判る. 依つて

定理 1. 任意の楕円函数は 🛭 及び 🗗 函数の (常数のみを係数とする) 有理函数として 表される.

31. 楕円函数の特性 85

こゝでまた \wp'^2 が \wp の三次式に等しいことを利用すれば、結局任意の楕円函数 f(u) は常に

$$f(u) = \frac{A + B\wp'(u)}{C + D\wp'(u)}$$
 (A, B, C, D は $\wp(u)$ の多項式)

なる形に表される. 更にこの分母子に $C - D\wp'(u)$ を乗じて整頓すれば

$$f(u) = P + Q\wp'(u)$$
 (P, Q は $\wp(u)$ の有理式)

となる. 特に f(u) が偶函数ならば P のみで、奇函数ならば $Q\wp'(u)$ のみで表される. 例へば $\operatorname{sn} u$ を表すには、

$$\omega_1 = 2K, \quad \omega_3 = iK'$$

なる如きρ函数を用ゐて

$$\operatorname{sn} u = -\frac{2\{\wp(u) - e\}}{\wp'(u)}$$

とすればよい。何となれば此右辺はsnと同一の週期,零点及び極を有し,一旦両辺をuの冪級数に展開すればその第一項は共にuとなるからである。

さて今 $f_1(u), f_2(u)$ を二つの楕円函数とし、それが同じ週期平行四辺形に属するとすれば、上述の理によりこれらの二函数は同じ $\wp(u), \wp'(u)$ を用ゐて

$$f_1(u) = P_1 + Q_1 \wp'(u), \quad f_2(u) = P_2 + Q_2 \wp'(u)$$
 (1)

なる形に表される. 之と

$$\wp'(u) = 4\wp(u)^3 - g_2\wp(u) - g_3 \tag{2}$$

との間に $\wp(u)$, $\wp'(u)$ を消去すれば

$$R\{f_1(u), f_2(u)\} = 0 \tag{3}$$

なる形の関係を得る. こゝに R は常数のみを係数とする有理整函数を示す. 依つて

定理 2. 同じ週期平行四辺形に属する二つの楕円函数の間には常に(常数のみを係数とする)代数的関係式が成立する.

特に $f_2 = f_1'$ とすれば、(3) は $f_1(u)$ に関する微分方程式となる.

定理 3. 任意の楕円函数は常数のみを係数とする第一階の代数的微分方程式を満足せ しめる.

その微分方程式を $f'_1(u)$ に関する代数方程式と考へて解けば

$$f_1'(u) = S\{f_1(u)\}$$

となる, 但しS は代数函数を示す. 今 $w = f_1(u)$ と置けば

$$\frac{dw}{du} = S(w),$$

従つて

$$u = \int \frac{dw}{S(w)}.$$

依つて次の定理を得る.

定理 4. 楕円函数はすべて或る代数函数の積分の逆函数である.

次に、任意の楕円函数を f(u) とすれば、之と同じ週期をもつ $\wp(u)$ と f(u) の間には、定理 2 により、

$$R_1\{f(u), \wp(u)\} = 0 \tag{4}$$

の如き代数的関係式が成り立つ. 変数 u を v, u+v 等と書き直せば

$$R_1\{f(u), \wp(u)\} = 0, R_1\{f(u+v), \wp(u+v)\} = 0$$
 (5)

となる. また一方に於て @ 函数は代数的加法公式を有するから

$$R_2\{\wp(u+v),\wp(u),\wp(v)\} = 0 \tag{6}$$

なる代数的関係式も成立する.そこで (4), (5), (6) の四式から $\wp(u)$, $\wp(v)$, $\wp(u+v)$ を消去すれば

$$R_3\{f(u+v), f(u), f(v)\} = 0$$

の如き関係を得る, $C > C R_3$ は前の R と同じく常数のみを係数とする有理整函数を示す.この結果は即ち f(u) なる函数の加法公式に他ならぬ.故に

定理 5. 楕円函数はすべて代数的加法公式を有する.

以上の五定理は何れも楕円函数の通性であるが、その逆が成立するかどうかを次に 考へて見よう.

定理 1 の逆は " \wp 及び \wp' の有理函数は楕円函数である"となる,これは勿論真である.

定理2の逆は"二つの楕円函数の間に代数的関係式が成立すれば両者は同じ週期平行四辺形に属する"となる. 之は両函数の週期が全部一致するといふ意味ではない, 両者が共通なる或る週期を有するといふ意味で、それは真である.

次に定理3について逆を考へて見るに、

$$R\{f(u), f'(u)\} = 0$$
 (Rの意味は前の通り)

なる函数 f(u) は必ずしも楕円函数とはいへぬから、逆が直ちに成立するわけではないが、若し更に f(u) が無限多価函数でないことを仮定すれば斯様な f(u) は

- (i) u の代数函数,
- (ii) e^{cu} (C は常数) の代数函数,
- (iii) u の楕円函数の代数函数,

の三種に限ることが Briot-Bouquet によつて証明された $^{(1)}$. もし特に f(u) を一価函数とすれば (i) 及び (ii) の "代数函数"は "有理函数"となり又 (iii) は単に "u の楕円函数"となる。 (ii) や (i) は夫々楕円函数の二つの基本週期の一方又は両方が無限大となつた特別の場合と考へることが出来るから,定理 2 は一価函数の範囲内で楕円函数の特徴をいひ表してゐるものである。

⁽¹⁾ Briot-Bouquet, Théorie ces fonctions doublement périodiques. (1859). なほ次の脚註にある Koebe の論文を参照せよ。

32. $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 函数

定理4は内容に於て定理3と同一であるから略す.

最後に定理 5 の逆は最著名である,即ち古くは Weierstrass,Phragmén,新しくは Koebe 等 $^{(2)}$ の研究によれば,代数的加法定理を有する解析函数は矢張り上記の (i),(ii),(iii) に限るのである.故に定理 5 も亦一価函数の範囲内で楕円函数の特徴を示すものである.

この逆定理の証明は第六章に譲る.

32. $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 函数

第 29 節の公式 (1) に於て $v = \omega_i (i = 1, 2, 3)$ と置けば

$$\wp(u) - e_i = -\frac{\sigma(u - \omega_i)\sigma(u + \omega_i)}{\sigma(u)^2 \sigma(\omega_i)^2}$$

となる. 然るに σ 函数の性質により

$$\sigma(u + 2\omega_i) = -e^{2\eta_i(u + \omega_i)}\sigma(u)$$

であるから、こゝでuを $u-\omega$;に変すれば

$$\sigma(u + \omega_i) = -e^{2\eta_i u} \sigma(u - \omega_i). \tag{1}$$

従つて上の式は次の如くに書き直される。

$$\wp(u) - e_i = \frac{e^{2\eta_i u} \sigma(u - \omega_i)^2}{\sigma(u)^2 \sigma(\omega_i)^2} = \frac{e^{-2\eta_i u} \sigma(u + \omega_i)^2}{\sigma(u)^2 \sigma(\omega_i)^2}.$$

故に

$$\sqrt{\wp(u) - e_i} = \pm \frac{e^{\eta_i u} \sigma(u - \omega_i)}{\sigma(u) \sigma(\omega_i)} = \pm \frac{e^{-\eta_i u} \sigma(u + \omega_i)}{\sigma(u) \sigma(\omega_i)}.$$

この左辺は一見したところ二価函数の様であるに関らず右辺の方から考へると実は二つの一価函数を表すのである.

C >で次の如き新函数 $\sigma_i (i = 1, 2, 3)$ を定義する,

$$\sigma_{i}(u) = -\frac{e^{\eta_{i}u}\sigma(u - \omega_{i})}{\sigma(\omega_{i})},$$

$$\forall \mathcal{U} \quad \sigma_{i}(u) = \frac{e^{-\eta_{i}u}\sigma(u + \omega_{i})}{\sigma(\omega_{i})}.$$
(2)

この二式が内容に於て同一であることは(1)によつて明かである。この函数を用ねれば

$$\wp(u) - e_i = \frac{\sigma_i(u)^2}{\sigma(u)^2} \tag{3}$$

となる、而して之に冠した根号の意味は

$$\sqrt{\wp(u) - e_i} = \frac{\sigma_i(u)}{\sigma(u)} \tag{4}$$

と定める. さて既に知れる如く

$$\wp'(u)^2 = 4\{\wp(u) - e_1\}\{\wp(u) - e_2\}\{\wp(u) - e_3\}$$

⁽²⁾ Phragmén, Acta Math., 7. (1885). Koebe, SchwarzFestschrift. (1914)

であるから, この両辺を平方に開けば

$$\wp'(u) = \pm 2\sqrt{\wp(u) - e_1}\sqrt{\wp(u) - e_2}\sqrt{\wp(u) - e_3}$$
$$= \pm 2\frac{\sigma_1(u)\sigma_2(u)\sigma_2(u)}{\sigma(u)\sigma(u)\sigma(u)}.$$

左辺は一価函数であるから、右辺の複号は何れか一方に定まるべきである。例に依つて両辺をuの冪級数に展開してその係数を比較すれば、負号をとるべきことが判る。 故に

$$\wp'(u) = -2\frac{\sigma_1(u)\sigma_2(u)\sigma_3(u)}{\sigma(u)^3}.$$
 (5)

一方に於て、(3)の両辺を微分すれば

$$\wp'(u) = 2\frac{\sigma_i(u)}{\sigma(u)} \frac{d}{du} \frac{\sigma_i(u)}{\sigma(u)}.$$

之と(5)とを比較すれば次の結果を得る,

$$\frac{d}{du}\frac{\sigma_i(u)}{\sigma(u)} = -\frac{\sigma_j(u)\sigma_k(u)}{\sigma(u)^2} \tag{6}$$

但しi,j,kは夫々1,2,3を一つづゝ代表するものとする. 更に

$$\frac{\sigma(u)}{\sigma_i(u)} = 1 \div \frac{\sigma_i(u)}{\sigma(u)}, \quad \frac{\sigma_i(u)}{\sigma_j(u)} = \frac{\sigma_i(u)}{\sigma(u)} \div \frac{\sigma_j(u)}{\sigma(u)}$$

なることに注意し,又

$$e_i - e_j = \{\wp(u) - e_j\} - \{\wp(u) - e_i\} = \frac{\sigma_j(u)^2 - \sigma_i(u)^2}{\sigma(u)^2}$$
 (7)

なることを利用して計算すれば,次の結果を得る,

$$\frac{d}{du}\frac{\sigma(u)}{\sigma_i(u)} = \frac{\sigma_j(u)\sigma_k(u)}{\sigma_i(u)^2},
\frac{d}{du}\frac{\sigma_i(u)}{\sigma_j(u)} = -(e_i - e_j)\frac{\sigma(u)\sigma_k(u)}{\sigma_j(u)^2}.$$
(8)

さてこゝに於て

$$S(u) = \frac{\sigma(u)}{\sigma_3(u)}, \quad C(u) = \frac{\sigma_1(u)}{\sigma_3(u)}, \quad D(u) = \frac{\sigma_2(u)}{\sigma_3(u)}$$

と置けば、(7)により

$$\begin{cases} C(u)^2 = 1 - (e_1 - e_3)S(u)^2, \\ D(u)^2 = 1 - (e_2 - e_3)S(u)^2. \end{cases}$$

又(8)により

$$\begin{cases} \frac{d}{du}S(u) = C(u)D(u), \\ \frac{d}{du}C(u) = -(e_1 - e_3)S(u)D(u), \\ \frac{d}{du}D(u) = -(e_2 - e_3)S(u)C(u). \end{cases}$$

これらの関係は 42 頁に述べた sn , cn , dn の間の関係に彷彿たるものがあることは直ち に看取されるであらう.

 $32. \quad \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 函数 89

今上のS(u)を微分した式を書き直せば

$$du = \frac{dS(u)}{C(u)D(u)} = \frac{dS(u)}{\sqrt{\{1 - (e_1 - e_3)S(u)^2\}\{1 - (e_2 - e_3)S(u)^2\}}}$$

となる. そこで

$$\sqrt{e_1 - e_3} S(u) = z, \quad \sqrt{e_1 - e_3} u = w,$$

$$\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = k^2$$
(9)

と置けば.

$$dw = \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

なる関係を得る,而して w=0 なるとき z=0 である.依つて z は $\operatorname{sn} w$ に他ならぬことを知る.即ち

$$\operatorname{sn} w = \sqrt{e_1 - e_3} \frac{\sigma(u)}{\sigma_3(u)} = \sqrt{e_1 - e_3} \frac{\sigma\left(\frac{w}{\sqrt{e_1 - e_3}}\right)}{\sigma_3\left(\frac{w}{\sqrt{e_1 - e_3}}\right)}.$$
 (10)

これで sn 函数が σ によつて表されたのである. さて

$$\sqrt{e_1 - e_3}S(u) = w$$

なることが判れば従つて

$$C(u)^2 = 1 - (e_1 - e_3)S(u)^2 = 1 - \operatorname{sn}^2 w = \operatorname{cn}^2 w,$$

 $D(u)^2 = 1 - (e_2 - e_3)S(u)^2 = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 w = \operatorname{dn}^2 w,$

且 $u \to 0$ なるとき $C(u) \to 1$, $D(u) \to 1$ であるから,

$$C(u) = \operatorname{cn} w, \quad D(u) = \operatorname{dn} w$$

なることを知る. 即ち

$$\operatorname{cn} w = \frac{\sigma_1(u)}{\sigma_3(u)}, \quad \operatorname{dn} w = \frac{\sigma_2(u)}{\sigma_3(u)} \tag{11}$$

である.

さて $\operatorname{sn} w$ が与へられたとすれば其基本週期は既知と考へてよい,之を 4K, 2iK' とする.一方に於て $\sigma(u)$ 及び $\sigma_3(u)$ の週期に対する性質を見ると,

$$\begin{cases} \sigma(u+2\omega_1) = -e^{2\eta_1(u+\omega_1)}\sigma(u), \\ \sigma(u+2\omega_3) = -e^{2\eta_3(u+\omega_3)}\sigma(u), \end{cases}$$
$$\begin{cases} \sigma_3(u+2\omega_1) = e^{2\eta_1(u+\omega_1)}\sigma_3(u), \\ \sigma_3(u+2\omega_3) = -e^{2\eta_3(u+\omega_3)}\sigma_3(u), \end{cases}$$

この最後の二式は σ の定義と σ の性質から証明される. 従つて

$$\frac{\sigma(u+2\omega_1)}{\sigma_3(u+2\omega_1)} = -\frac{\sigma(u)}{\sigma_3(u)}, \quad \frac{\sigma(u+2\omega_3)}{\sigma_3(u+2\omega_3)} = \frac{\sigma(u)}{\sigma_3(u)}.$$

故に $\frac{\sigma(u)}{\sigma_3(u)}$ の週期は $4\omega_1, 2\omega_3$ である. そこで今

$$K = \omega_1 \sqrt{e_1 - e_3}, \quad iK' = \omega_3 \sqrt{e_1 - e_3}$$
 (12)

なる様な ω_1, ω_3 を採用したとすれば二つの函数

$$\operatorname{sn}(u\sqrt{e_1-e_3}), \quad \sqrt{e_1-e_3}\frac{\sigma(u)}{\sigma_3(u)}$$

は同一の週期を有する楕円函数で極及び零点がすべて一致し、且その比は $u\to 0$ なる とき 1 に収斂する。故に丁度 (10) が成立することになる。

次には逆に \wp の方を \sin で表すことを考へよう. (3) に於てi=3とすれば

$$\wp(u) - e_3 = \frac{\sigma_3(u)^2}{\sigma(u)^2}$$
$$= \frac{e_1 - e_3}{\operatorname{sn}^2 w}.$$

従つて

$$\wp(u) = (e_1 - e_3) \left(\frac{1}{\operatorname{sn}^2 w} + \frac{e_3}{e_1 - e_3} \right) = (e_1 - e_3) \left(\frac{1}{\operatorname{sn}^2 w} - \frac{1 + k^2}{3} \right),$$

之を通常

$$\wp(u) = \left(\frac{K}{\omega_1}\right)^2 \left(\frac{1}{\operatorname{sn}^2 w} - \frac{1 + k^2}{3}\right) \tag{13}$$

と書く.

第四章 ϑ 函数

ϑ 函数 33.

前章に述べた Weierstrass の楕円函数は理論上別に申分はないが実際の数値計算に は甚だ不便な点が多い. 例へば u, ω_1, ω_3 の数値が与へられたとき $\wp(u)$ の数値を算出 しようとしても定義の式から直接に算出することは殆んど不可能であるし、又 $\wp(u)$ の 冪級数を用ゐるとしても先づ g_2, g_3 の値を知らなければならぬが、之を算出するのは $\wp(u)$ を定義から直接に計算するのと同様に困難である.これらの困難を除くために ϑ 函数なるものを用ゐる.

第22節に述べた記号は今後なほ踏襲するが、更にまた

$$\frac{u}{2\omega_1} = v, \quad \frac{\omega_3}{\omega_1} = \tau$$

と置く、従つて第22節の規約により

$$\Im(\tau) = \Im\left(\frac{\omega_3}{\omega_1}\right) > 0$$

wi である. 最後にこの v,τ を用ゐて

$$e^{v\pi i} = z, \quad e^{\tau\pi i} = q$$

なるものを定義する、 $\Im(\tau) > 0$ であるから

$$|q| = e^{\pi \Im(\tau)} < 1$$

となる, 之が重要な性質である.

さていよいよ次の如くに四つの θ 函数を定義する.

性質である.
如くに四つの
$$\vartheta$$
 函数を定義する.
$$\vartheta_1(v) = i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2} z^{2n-1},$$

$$\vartheta_2(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)} z^{2n-1},$$

$$\vartheta_3(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} z^{2n},$$

$$\vartheta_0(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{2n}.$$

$$(1)$$

|q|<1 であるから、これらの級数は何れも $0<|z|<\infty$ (v についていへば $|v|<\infty$) なる限り任意の閉面分に於て絶対且一様収斂なることは明かである, 故に

 ϑ 函数はすべて整函数である.

92 第四章 artheta 函数

扨いきなり此定義に接したのでは如何なる函数か判然し難いから、次に少し書き直して見よう。 先づ $\vartheta_3(v)$ が一番簡単な形をしてゐるから、之を探ることにする.

$$\vartheta_3(v) = \dots + q^4 z^{-4} + q z^{-2} + 1 + q z^2 + q^4 z^4 + \dots$$

$$= 1 + q(z^2 + z^{-2}) + q^4 (z^4 + z^{-4}) + \dots$$

$$= 1 + q(e^{2v\pi i} + e^{-2v\pi i}) + q^4 (e^{4v\pi i} + e^{-4v\pi i}) + \dots$$

$$= 1 + 2q \cos 2\pi v + 2q^4 \cos 4\pi v + \dots$$

他の函数についても同様の変形が行はれて次の結果を得る.

$$\vartheta_{1}(v) = 2(q^{\frac{1}{4}}\sin\pi v - q^{\frac{9}{4}}\sin3\pi v + q^{\frac{25}{4}}\sin5\pi v - \cdots),
\vartheta_{2}(v) = 2(q^{\frac{1}{4}}\cos\pi v + q^{\frac{9}{4}}\cos3\pi v + q^{\frac{25}{4}}\cos5\pi v + \cdots),
\vartheta_{3}(v) = 1 + 2(q\cos2\pi v + q^{4}\cos4\pi v + q^{9}\cos6\pi v + \cdots),
\vartheta_{0}(v) = 1 - 2(q\cos2\pi v - q^{4}\cos4\pi v + q^{9}\cos6\pi v - \cdots),$$
(2)

故に $\theta_1(v)$ は奇函数, 他の三つは偶函数である.

特に v=0 と置いたときの値は次の通り、但し $\vartheta_1,\vartheta_2,\cdots$ は夫々 $\vartheta_1(0),\vartheta_2(0),\cdots$ の略である.

$$\vartheta_{1} = 0$$

$$\vartheta_{2} = 2(q^{\frac{1}{4}} + q^{\frac{9}{4}} + q^{\frac{25}{4}} + \cdots),$$

$$\vartheta_{3} = 1 + 2(q + q^{4} + q^{9} + \cdots),$$

$$\vartheta_{0} = 1 - 2(q - q^{4} + q^{9} - \cdots),$$
(3)

 ϑ_1 に於ては $\vartheta_1'(0)$ が屡用ゐられる,即ち

$$\vartheta_1' = 2\pi (q^{\frac{1}{4}} - 3q^{\frac{9}{4}} + 5q^{\frac{25}{4}} - \cdots). \tag{3'}$$

又四つの ∂ 函数が何れも微分方程式

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = 4\pi i \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \tag{4}$$

を満足せしめることも (2) によつて明かである.

34. 週期に対する性質

従来は $2\omega_1, 2\omega_3$ を週期と称して来たが、 ϑ 函数に関しては各を $2\omega_1$ で割つたもの即ち $1,\tau$ を週期と呼ぶことにする、何となれば ϑ 函数に於ては $v=\frac{u}{2\omega_1}$ を変数と考へるからである.

併し週期とはいつても真の意味の週期とは違ふ. 次に之を吟味して見よう.

先づv に半週期 $\frac{1}{2}$ を加へたとする. v が $v+\frac{1}{2}$ に変ずれば z は iz に変ずる,従つて前節 (1) により

$$\begin{split} \vartheta_1\left(v+\frac{1}{2}\right) &= \vartheta_2(v), \\ \vartheta_3\left(v+\frac{1}{2}\right) &= \vartheta_0(v), \\ \vartheta_0\left(v+\frac{1}{2}\right) &= \vartheta_3(v). \end{split}$$

34. 週期に対する性質 93

もし又vに他の半週期 $\frac{\tau}{2}$ を加へたとすれば、zは $q^{\frac{1}{2}}z$ に変ずる、従つて

$$\vartheta_1\left(v + \frac{\tau}{2}\right) = i \sum_{n = -\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 + \frac{2n-1}{2}} z^{2n-1}$$
$$= i q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \vartheta_0(v) = i e^{-\pi i \left(v + \frac{\tau}{4}\right)} \vartheta_0(v).$$

同様にして

$$\begin{split} \vartheta_2\left(v+\frac{\tau}{2}\right) &= e^{-\pi i\left(v+\frac{\tau}{4}\right)}\vartheta_3(v),\\ \vartheta_3\left(v+\frac{\tau}{2}\right) &= e^{-\pi i\left(v+\frac{\tau}{4}\right)}\vartheta_2(v),\\ \vartheta_0\left(v+\frac{\tau}{2}\right) &= ie^{-\pi i\left(v+\frac{\tau}{4}\right)}\vartheta_1(v). \end{split}$$

これらの結果を反復使用すれば次の表に示す如き結果を得る, 但し

$$\varepsilon = e^{-\pi i \left(v + \frac{\tau}{4}\right)} \quad \delta = e^{-\pi i (2v + \tau)}.$$

変数函数	$v + \frac{1}{2}$	$v + \frac{\tau}{2}$	$v + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}$	v+1	$v + \tau$	$v+1+\tau$
ϑ_1	ϑ_2	$i\varepsilon\vartheta_0$	$\varepsilon \vartheta_3$	$-\vartheta_1$	$-\delta\vartheta_1$	$\delta \vartheta_1$
ϑ_2	$-\vartheta_1$	$\varepsilon \vartheta_3$	$-i\varepsilon\vartheta_0$	$-\vartheta_2$	$\delta \vartheta_2$	$-\delta\vartheta_2$
ϑ_3	ϑ_0	$\varepsilon \vartheta_2$	$i \varepsilon \vartheta_1$	ϑ_3	$\delta \vartheta_3$	$\delta \vartheta_3$
ϑ_0	ϑ_3	$i\varepsilon\vartheta_1$	$\varepsilon \vartheta_2$	ϑ_0	$-\delta\vartheta_0$	$-\delta\vartheta_0$

例へば ϑ_1 について考へれば

$$\begin{cases} \vartheta_1(v+1) = \vartheta_1(v), \\ \vartheta_1(v+\tau) = -e^{-\pi i(2v+\tau)}\vartheta_1(v). \end{cases}$$
 (1)

両辺をvで微分すれば

$$\begin{cases} \vartheta_1'(v+1) = -\vartheta_1'(v), \\ \vartheta_1'(v+\tau) = 2\pi i e^{-\pi i (2v+\tau)} \vartheta_1(v) - e^{-\pi i (2v+\tau)} \vartheta_1'(v). \end{cases}$$

前の式と辺々相除すれば,

$$\begin{cases} \frac{\vartheta_1'(v+1)}{\vartheta_1(v+1)} = \frac{\vartheta_1'(v)}{\vartheta_1(v)}, \\ \frac{\vartheta_1'(v+\tau)}{\vartheta_1(v+\tau)} = \frac{\vartheta_1'(v)}{\vartheta_1(v)} - 2\pi i \end{cases}$$

となる. 依つて第 23 節定理 4, 5, 6 に於けると同様に、今 a を適当にとつて四点 $a, a+1, a+1+\tau, a+\tau$ を頂点とする平行四辺形 P' の周上に $\vartheta_1(v)$ の零点がない様に し、而して此周上を正の方向に一周する積分路をとれば

$$\int_{(P')} \frac{\vartheta_1'(v)}{\vartheta_1(v)} \, dv = \int_a^{a+1} + \int_{a+1}^{a+1+\tau} + \int_{a+1+\tau}^{a+\tau} + \int_{a+\tau}^a.$$

然るに

$$\int_{a+1}^{a+1+\tau} = \int_a^{a+\tau} \frac{\vartheta_1'(v)}{\vartheta_1(v)} \, dv, \quad 故に \quad \int_{a+1}^{a+1+\tau} + \int_{a+\tau}^a = 0,$$

 $oldsymbol{94}$ 第四章 artheta 函数

又

$$\int_{a+1+\tau}^{a+\tau} = \int_{a+1}^{a} \left\{ \frac{\vartheta_1'(v)}{\vartheta_1(v)} - 2\pi i \right\} dv,$$

故に

$$\int_{a}^{a+1} + \int_{a+1+\tau}^{a+\tau} = 2\pi i.$$

故に

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(P')} \frac{\vartheta_1'(v)}{\vartheta_1(v)} \, dv = 1.$$

これ即ち一つの週期平行四辺形内に於ける $\vartheta_1(v)$ の零点の数と極の数との差を表すものであるが、 $\vartheta_1(v)$ は前に述べた如く整函数で有限なる極を有せぬから結局平行四辺形内に一位の零点が唯一つあることを知る。その零点は既に知れる通り v=0 である。

他の三つの函数についても同様に各平行四辺形内に一位の零点が唯一つづ > あることが証明される。その位置は前頁の表によつて次の如くなることが判る.

$$\vartheta_2\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad \vartheta_3\left(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}\right) = 0, \quad \vartheta_0\left(\frac{\tau}{2}\right) = 0.$$

次には四つの ϑ 函数の間に成立する重要な関係式を求めて見よう. (1) の両辺を二乗すれば

$$\begin{cases} \vartheta_1(v+1)^2 = \vartheta_1(v)^2, \\ \vartheta_1(v+\tau)^2 = e^{-2\pi i(2v+\tau)}\vartheta_1(v)^2. \end{cases}$$
 (2)

となる,但しこゝで ϑ_1 の添数を省いたのは実は(2)は ϑ_1 に限らず $\vartheta_2,\vartheta_3,\vartheta_0$ の何れとしても其儘成立するからである.そこで今Cを常数として

$$F(v) = C \frac{{\vartheta_2}^2 {\vartheta_0}(v)^2 - {\vartheta_3}^2 {\vartheta_1}(v)^2}{{\vartheta_2}(v)^2}$$

なる函数を考へれば、(2) によつて之は 1 及び au なる週期を有する楕円函数である.その極は

$$\vartheta_2(v)^2 = 0$$
 即ち $v = \frac{1}{2}$

にあつて二位の極である如く見えるが、実はその値に対して分子が

$$\vartheta_2^2\vartheta_0\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \vartheta_3^2\vartheta_1\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \vartheta_2^2\vartheta_3^2 - \vartheta_3^2\vartheta_2^2 = 0$$
 (表による)

となるから、極の位数は 2 より低いことになる.然るに二位より低い楕円函数は実は常数である(第 23 節定理 3, 4)から,F(v) は常数でなければならぬ.その常数を 1 ならしめる様に C を定めるとすれば

$$C\vartheta_2^2\vartheta_0(v)^2 - C\vartheta_3^2\vartheta_1(v)^2 = \vartheta_2(v)^2.$$

試みにv=0と置けば

$$C\vartheta_2^2\vartheta_0^2 = \vartheta_2^2$$

之でCが定まる、その値を上の式に代入すれば

$$\vartheta_2^2 \vartheta_0(v)^2 - \vartheta_3^2 \vartheta_1(v)^2 = \vartheta_0^2 \vartheta_2(v)^2.$$
 (3)

35. 無限乗積展開 95

全く同様の論法で

$$\vartheta_3^2 \vartheta_0(v)^2 - \vartheta_2^2 \vartheta_1(v)^2 = \vartheta_0^2 \vartheta_3(v)^2 \tag{4}$$

も証明される. (4) に於て $v=\frac{1}{2}$ とすれば

$$\vartheta_0^4 + \vartheta_2^4 = \vartheta_3^4 \tag{5}$$

なる関係を得る,これは著名な式である.

注意 (3), (4) を $\vartheta_0(v)^2$, $\vartheta_1(v)^2$ に関する聯立一次方程式として解けば

$$\begin{split} \vartheta_0(v)^2 &= \frac{\vartheta_0(v)^2 \{ \vartheta_3{}^2 \vartheta_3(v)^2 - \vartheta_2{}^2 \vartheta_2(v)^2 \}}{\vartheta_3{}^4 - \vartheta_2{}^4}, \\ \vartheta_1(v)^2 &= \frac{\vartheta_0(v)^2 \{ \vartheta_2{}^2 \vartheta_3(v)^2 - \vartheta_3{}^2 \vartheta_2(v)^2 \}}{\vartheta_3{}^4 - \vartheta_2{}^4} \end{split}$$

を得る. 両辺を更に二乗して相滅じ、(5) を利用すれば、次の式を得る、

$$\vartheta_0(v)^4 + \vartheta_2(v)^4 = \vartheta_1(v)^4 + \vartheta_3(v)^4.$$

(5) はこれの v=0 なる特別の場合に当る.

35. 無限乗積展開

砂 函数を無限乗積の形に表す式を求めるために、先づ有限乗積

$$F_m(z) = \prod_{n=1}^{m} (1 + q^{2n-1}z^2)(1 + q^{2n-1}z^{-2})$$

なるものを考へる. 此式は z と z^{-1} とについて対称であるから次の如くに展開される.

$$F_m(z) = A_0^{(m)} + A_1^{(m)}(z^2 + z^{-2}) + A_2^{(m)}(z^4 + z^{-4}) + \dots + A_m^{(m)}(z^{2m} + z^{-2m})$$

而してこゝに

$$A_m^{(m)} = qq^3q^5 \cdot \cdot \cdot \cdot q^{2m-1} = q^{m^2}$$

なることは容易に判る. 他の係数を求めるには, $F_m(z)$ の z に qz を代入するとき次の関係があることを利用する,

$$F_m(qz) = \frac{(1+q^{2m+1}z^2)(1+q^{-1}z^{-2})}{(1+q^{2m-1}z^{-2})(1+qz^2)}F_m(z).$$

之を書き直せば

$$(q^{2m} + qz^2)F_m(qz) = (1 + q^{2m+1}z^2)F_m(z)$$

となる. この両辺をzの冪に従つて展開し, z^m の係数を比較すれば

$${A_{k-1}}^{(m)} = \frac{1 - q^{2m+2k}}{q^{2k-1}(1 - q^{2m-2k+2})}{A_k}^{(m)}$$

なる関係を得る. $A_m^{(m)}$ は既知であるから,この関係に於て k を順次に $m,m-1,\cdots$ とすれば, $A_{m-1}^{(m)},A_{m-2}^{(m)},\cdots$ が得られる,その一般なる形は

$$A_k^{(m)} = q^{k^2} \frac{(1 - q^{2m+2k+2})(1 - q^{2m+2k+4}) \cdots (1 - q^{4m})}{(1 - q^2)(1 - q^4) \cdots (1 - q^{2m-2k})}$$

96 第四章 ϑ 函数

である.

こゝに於て m を無限大ならしめて

$$\lim_{m \to \infty} F_m(z) = F(z)$$

とする. これが $0<|z|<\infty$ なる任意の閉面分に於て一様収斂なることは |q|<1 から 容易に証明される. F(z) の展開式を

$$F(z) = A_0 + A_1(z^2 + z^{-2}) + A_2(z^4 + z^{-4}) + \cdots$$

とすれば,

$$A_k = \lim_{m \to \infty} A_k^{(m)}$$

であるが、上に得た $A_k^{(m)}$ の式の分母は $m \to \infty$ なるとき

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})$$

となり、之は勿論絶対収斂である、又分子は丁度この乗積の或る所から先きの剰余の 一部であるから1に収斂する、依つて

$$A_k = \frac{q^{k^2}}{\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})}$$

之を代入すれば

$$F(z)\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})=1+\sum_{k=1}^{\infty}q^{k^2}(z^{2k}+z^{-2k}),$$

この右辺は $\vartheta_3(v)$ に他ならぬ. 故に

$$\vartheta_3(v) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}) \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n-1}z^2) (1 + q^{2n-1}z^{-2}).$$

これで ϑ 函数の無限乗積展開の手懸りが出来たから、あとは v を順次に $v+\frac{1}{2},v+\frac{\tau}{2},v+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}$ に変じて見れば前節の表によつて夫々 $\vartheta_0(v),\vartheta_2(v),\vartheta_1(v)$ の式が得られる。その結果を次に列挙する.

$$\begin{split} \vartheta_1(v) &= -iq^{\frac{1}{4}}(z-z^{-1}) \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n}) \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n}z^2) (1-q^{2n}z^{-2}) \\ &= 2q^{\frac{1}{4}} \sin \pi v \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n}) \prod_{n=1}^{\infty} (1-2q^{2n}\cos 2\pi v + q^{4n}), \\ \vartheta_2(v) &= q^{\frac{1}{4}}(z+z^{-1}) \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n}) \prod_{n=1}^{\infty} (1+q^{2n}z^2) (1+q^{2n}z^{-2}) \\ &= 2q^{\frac{1}{4}}\cos \pi v \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n}) \prod_{n=1}^{\infty} (1+2q^{2n}\cos 2\pi v + q^{4n}), \end{split}$$

35. 無限乗積展開 97

$$\begin{split} \vartheta_3(v) &= \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n}) \prod_{n=1}^{\infty} (1+q^{2n-1}z^2) (1+q^{2n-1}z^{-2}) \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n}) \prod_{n=1}^{\infty} (1+2q^{2n-1}\cos 2\pi v + q^{4n-2}), \\ \vartheta_0(v) &= \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n}) \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n-1}z^2) (1-q^{2n-1}z^{-2}) \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n}) \prod_{n=1}^{\infty} (1-2q^{2n-1}\cos 2\pi v + q^{4n-2}). \end{split}$$

特にv=0なるときの値が屡使用されるが、之を簡単に表すために次の記号を用ゐる.

$$Q_{0} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}), \qquad Q_{1} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n}),$$

$$Q_{2} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n-1}), \quad Q_{3} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n-1}).$$
(1)

之を用ゐて書けば

$$\vartheta_2 = 2q^{\frac{1}{4}}Q_0Q_1^2, \quad \vartheta_3 = Q_0Q_2^2, \quad \vartheta_0 = Q_0Q_3^2$$
(2)

である. ϑ_1 は 0 であるが、 $\vartheta_1'(0)$ (之を ϑ_1' と略記する)がよく使はれる. 之を求めるには

$$\vartheta_1' = \lim_{v \to 0} \vartheta_1'(v) = \lim_{v \to 0} \frac{\vartheta_1(v)}{v}$$

として, 前の乗積の式を代用して計算すればよい, その結果は

$$\vartheta_1' = 2\pi q^{\frac{1}{4}} Q_0^{3}. \tag{3}$$

さて(1) に挙げたQの間には次の様な関係がある.

$$Q_0Q_1 = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{4n}), \quad Q_2Q_3 = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{4n-2}).$$

然るに 4n と 4n-2 との全体を合せれば丁度すべての偶数になるから

$$Q_0Q_1Q_2Q_3 = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}) = Q_0,$$

 Q_0 は絶対収斂であるから勿論 0 ではない、故に

$$Q_1 Q_2 Q_3 = 1. (4)$$

(2), (3), (4) から直ちに次の結果を得る.

$$\vartheta_1' = \pi \vartheta_2 \vartheta_3 \vartheta_0. \tag{5}$$

此式の両辺はvに関していへば常数であるが、なほ τ を含んでゐる。依つて τ の函数と見て対数微分を行へば

$$\frac{1}{\vartheta_1'}\frac{\partial\vartheta_1'}{\partial\tau} = \frac{1}{\vartheta_2}\frac{\partial\vartheta_2}{\partial\tau} + \frac{1}{\vartheta_3}\frac{\partial\vartheta_3}{\partial\tau} + \frac{1}{\vartheta_0}\frac{\partial\vartheta_0}{\partial\tau}$$

となる. こゝに第33節(4)を応用すれば次の式を得る.

$$\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} = \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} + \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} + \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0},$$

但し ϑ_1''' は $\vartheta_1'''(v)$ に於てv=0と置いたもの,其他も之に準ずる.

36. σ 函数との関係

 σ 函数は整函数で、その週期に対する性質や各週期平行四辺形内に一位の零点を一つづゝ有することなどが ϑ 函数とよく似てゐる、今両者の関係を見出すために

$$\overline{\vartheta}(u) = e^{-\frac{\eta_1}{2\omega_1}u^2} \sigma(u)$$

なる函数を作れば、 σ 函数の性質から直ちに次の結果が証明される(途中の計算は略す).

$$\begin{cases} \overline{\sigma}(u+2\omega_1) = -\overline{\sigma}(u), \\ \overline{\sigma}(u+2\omega_3) = -e^{-\frac{\pi i}{\omega_1}(u+\omega_3)}\overline{\sigma}(u). \end{cases}$$

前の如く

$$\frac{u}{2\omega_1} = v, \quad \frac{\omega_3}{\omega_1} = \tau$$

とし、且

$$\overline{\sigma}(2\omega_1 v) = \varphi(v)$$

とすれば、上の結果は次の如くに書き直される.

$$\begin{cases} \varphi(u+1) = -\varphi(u), \\ \varphi(u+\tau) = -e^{-\pi i(2v+\tau)}\varphi(u). \end{cases}$$

これは丁度 $\theta_1(v)$ の週期に対する性質と同一である. 故に

$$\frac{\varphi(v)}{\vartheta_1(v)}$$

なるものを考へれば、之は楕円函数である、而して $\vartheta_1(v)=0$ なるときは同時に $\varphi(v)=0$ となるから整函数でなければならぬ。従つてこの函数は実は常数に等しい、 之を C とすれば

$$\varphi(v) = C\vartheta_1(v).$$

もとに戻せば

$$e^{-\frac{\eta_1}{2\omega_1}u^2}\sigma(u) = e^{-2\eta_1\omega_1v^2}\sigma(2\omega_1v) = C\vartheta_1(v).$$

之を v で微分すれば

$$-4\eta_1 \omega_1 v e^{-2\eta_1 \omega_1 v^2} \sigma(2\omega_1 v) + 2\omega_1 e^{-2\eta_1 \omega_1 v^2} \sigma'(2\omega_1 v) = C\vartheta'_1(v).$$

C > v = 0 と置けば、 $\sigma'(0) = 1$ であるから、

$$2\omega_1 = C\vartheta_1'$$

を得る. 依つて

$$\sigma(u) = 2\omega_1 e^{2\eta_1 \omega_1 v^2} \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_1'}.$$
 (1)

 ϑ 函数は級数にしても乗積にしても比較的速かに収斂するので実際の計算には便利である,その ϑ によつて σ が表されたのであるから (1) によつて σ 函数の値を容易に算出することが出来る.(但しそれには η_1 を知らなければならぬが,之を求めることは

37. p 函数との関係 99

次節に述べる.) σ のみならず従来既知の諸函数を ϑ で表さうといふのが吾々の目的である.

(1) に於てuをu+1に、従つてvを $v+\frac{1}{2}$ に変ずれば、

$$\sigma(u+\omega_1) = 2\omega_1 e^{2\eta_1\omega_1\left(v+\frac{1}{2}\right)^2} \frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_1'},$$

$$\sigma(\omega_1) = 2\omega_1 e^{2\frac{1}{2}\eta_1\omega_1} \frac{\vartheta_2}{\vartheta_1'}.$$

従つて

$$\sigma_{1}(u) = \frac{e^{-\eta_{1}u}\sigma(u+\omega_{1})}{\sigma(\omega_{1})} = e^{2\eta_{1}\omega_{1}v^{2}}\frac{\vartheta_{2}(v)}{\vartheta_{2}}.$$

$$\sigma_{2}(u) = e^{2\eta_{1}\omega_{1}v^{2}}\frac{\vartheta_{3}(v)}{\vartheta_{3}},$$

$$\sigma_{3}(u) = e^{2\eta_{1}\omega_{1}v^{2}}\frac{\vartheta_{0}(v)}{\vartheta_{0}}$$

$$(2)$$

を得る.

同様にして

37. 😡 函数との関係

第32節(4)により

$$\sqrt{\wp(u) - e_i} = \frac{\sigma_i(u)}{\sigma(u)}, \quad (i = 1, 2, 3)$$

これに前節の(2)を代入すれば次の結果を得る.

$$\sqrt{\wp(u) - e_1} = \frac{1}{2\omega_1} \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_2} \frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_1(v)},
\sqrt{\wp(u) - e_2} = \frac{1}{2\omega_1} \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_3} \frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_1(v)},
\sqrt{\wp(u) - e_3} = \frac{1}{2\omega_1} \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_0} \frac{\vartheta_0(v)}{\vartheta_1(v)}.$$
(1)

更に第32節(5)により

$$\begin{split} \wp'(u) &= -2 \left(\frac{1}{2\omega_1}\right)^3 \frac{{\vartheta_1'}^3}{{\vartheta_2}{\vartheta_3}{\vartheta_0}} \frac{{\vartheta_2(v)}{\vartheta_3(v)}{\vartheta_0(v)^3} \\ &= -\frac{\pi}{4\omega_1^3} {\vartheta_1}^2 \frac{{\vartheta_2(v)}{\vartheta_3(v)}{\vartheta_0(v)^3}. \\ &\qquad \qquad (\mathfrak{A} 35 \ \mathfrak{M} \ (5) \ \text{による}) \end{split}$$

(1) の第一式に於て $u=\omega_2=-\omega_1=-\omega_3, v=-\frac{1}{2}-\frac{\tau}{2}$ と置けば

$$\sqrt{e_2 - e_1} = \frac{1}{2\omega_1} \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_2} \frac{\vartheta_2\left(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}\right)}{-\vartheta_1\left(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2\omega_1} \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_2} \frac{-i\epsilon\vartheta_0}{-\epsilon\vartheta_3} \quad (第 34 節の表による)$$

$$= \frac{i\vartheta_1'\vartheta_0}{2\omega_1\vartheta_2\vartheta_3} = i\frac{\pi}{2\omega_1}\vartheta_0^2.$$

100 第四章 ϑ 函数

同様の方法によつて次の式を得る.

$$\sqrt{e_{2} - e_{1}} = i \frac{\pi}{2\omega_{1}} \vartheta_{0}^{2}, \quad \sqrt{e_{3} - e_{1}} = -i \frac{\pi}{2\omega_{1}} \vartheta_{3}^{2},
\sqrt{e_{1} - e_{2}} = \frac{\pi}{2\omega_{1}} \vartheta_{0}^{2}, \quad \sqrt{e_{3} - e_{2}} = -i \frac{\pi}{2\omega_{1}} \vartheta_{2}^{2},
\sqrt{e_{1} - e_{3}} = \frac{\pi}{2\omega_{1}} \vartheta_{3}^{2}, \quad \sqrt{e_{2} - e_{3}} = -\frac{\pi}{2\omega_{1}} \vartheta_{2}^{2}.$$
(2)

(2) から e_1, e_2, e_3 を求めれば

$$e_{1} = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2\omega_{1}}\right)^{2} (\vartheta_{3}^{4} + \vartheta_{0}^{4}),$$

$$e_{2} = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2\omega_{1}}\right)^{2} (\vartheta_{2}^{4} - \vartheta_{0}^{4}),$$

$$e_{3} = -\frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2\omega_{1}}\right)^{2} (\vartheta_{2}^{4} + \vartheta_{3}^{4})$$

となる. 之と (1) とを組合せれば $\wp(u)$ が計算されるが、もつと便利なのは次に述べる級数による方法である.

前節の(1)により

$$\sigma(u) = 2\omega_1 e^{2\eta_1 \omega_1 v^2} \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_1'}.$$

これに無限乗積展開を代入すれば

$$\sigma(u) = 2\frac{\omega_1}{\pi} e^{2\eta_1 \omega_1 v^2} \sin \pi v \frac{\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n} z^2)(1 - q^{2n} z^{-2})}{\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})^2}.$$

となる. この両辺をuに関して $\left(v=\frac{u}{2\omega_1}$ なることに注意 $\right)$ 対数微分すれば

$$\zeta(v) = 2\eta_1 v + \frac{\pi}{2\omega_1} \cot \pi v - \frac{\pi i}{\omega_1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{q^{2n} z^2}{1 - q^{2n} z^2} - \frac{q^{2n} z^{-2}}{1 - q^{2n} z^{-2}} \right)$$

となる. 今

$$|q^2| < |z^2| < |q^{-2}| \tag{3}$$

従つて

$$|q^{2n}z^2| < 1, \quad |q^{2n}z^{-2}| < 1$$

と考えへれば上の式の括弧内をzの冪級数に書き直すことが出来る。その結果を整頓してzの同じ冪の項を夫々集めれば次の式を得る,

$$\zeta(v) = 2\eta_1 v + \frac{\pi}{2\omega_1} \cot \pi v - \frac{\pi i}{\omega_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{1 - q^{2n}} (z^{2n} - z^{-2n})$$

$$= 2\eta_1 v + \frac{\pi}{2\omega_1} \cot \pi v + \frac{2\pi}{\omega_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{1 - q^{2n}} \sin 2n\pi v. \tag{4}$$

これで $\zeta(u)$ が計算される.

37. 👂 函数との関係 101

注意 v 及び τ の虚部を夫々 v' 及び τ' とすれば, (3) はつまり

$$-\tau' < v' < \tau'$$

なる条件に他ならぬ. 故に v が基本週期平行四辺形($0,1,1+\tau,\tau$ を頂点とするもの)内にあるときは確かに此条件は満足されて居る.

(4) を更に u に関して微分すれば、

$$\wp(u) = \left(\frac{1}{2\omega_1}\right)^2 \left\{ -4\eta_1 v + \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi v} - 8\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^{2n}}{1 - q^{2n}} \cos 2n\pi v \right\},\tag{5}$$

$$\wp'(u) = \left(\frac{1}{2\omega_1}\right)^3 \left\{ -\frac{2\cos\pi v}{\sin^3\pi v} + 16\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 q^{2n}}{1 - q^{2n}} \sin 2n\pi v \right\}$$
 (6)

等の式を得る.

さて (4), (5) 等を用ゐて ζ , \wp 等の函数を計算するにはなほ η_1 の値を知らなけれはならぬ、次に之を求めることを考へよう、

第 26 節に於て $\zeta(u)$ を u の冪級数に展開することを知つた、それによれば

$$\zeta(u) = \frac{1}{2\omega_1 v} - \frac{g_2}{60} (2\omega_1 v)^3 - \frac{g_3}{140} (2\omega_1 v)^5 - \dots$$
 (7)

である. 一方に於て (4) の右辺を u の冪級数に展開すれば

$$\zeta(u) = 2\eta_1 v + \frac{\pi}{2\omega_1} \left(\frac{1}{\pi v} - \frac{1}{3}\pi v - \frac{1}{45}\pi^3 v^3 - \frac{2}{945}\pi^5 v^5 - \dots \right)$$
$$+ \frac{2\pi}{\omega_1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{1 - q^{2n}} \left(2n\pi v - \frac{4}{3}n^3\pi^3 v^3 + \frac{4}{15}n^5\pi^5 v^5 - \dots \right)$$

となる. 之を (7) と比較し、各右辺に於ける v, v^2, v^3 の係数を夫々相等しと置けば、次の関係が得られる.

$$\eta_1 = \frac{\pi^2}{\omega_1} \left(\frac{1}{12} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^{2n}}{1 - q^{2n}} \right),$$

$$g_2 = \left(\frac{\pi}{\omega_1} \right)^4 \left(\frac{1}{12} + 20 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 q^{2n}}{1 - q^{2n}} \right),$$

$$g_3 = \left(\frac{\pi}{\omega_1} \right)^6 \left(\frac{1}{216} - \frac{7}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 q^{2n}}{1 - q^{2n}} \right).$$

 η_1 が之によつて計算されれば (4), (5) が実際に使用される. 依つて (5) に於て $u=\omega_1,v=\frac{1}{2}$ と置けば,

$$e_1 = \frac{1}{4\omega_1^2} \left\{ -4\eta_1\omega_1 + \pi^2 - 8\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{nq^{2n}}{1 - q^{2n}} \right\}.$$

 e_1,g_2,g_3 が知れれば e_2,e_3 は二次方程式を解くことによつても求められる.又 η_3 は η_1 を用ゐて第 26 節 (7) の関係式からも求められる.

102 第四章 ϑ 函数

38. sn 函数との関係

第32節の結果によれば

$$\begin{cases}
\operatorname{sn} w = \sqrt{e_1 - e_3} \frac{\sigma(u)}{\sigma_3(u)}, \\
\operatorname{cn} w = \frac{\sigma_1(u)}{\sigma_3(u)}, \\
\operatorname{dn} w = \frac{\sigma_2(u)}{\sigma_3(u)}
\end{cases}$$

である. こゝに前節(2)及び前々節(1),(2)を代入すれば,次の式を得る.

$$\begin{cases} & \operatorname{sn} w = \frac{\vartheta_3}{\vartheta_2} \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)}, \\ & \operatorname{cn} w = \frac{\vartheta_0}{\vartheta_2} \frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_0(v)}, \\ & \operatorname{dn} w = \frac{\vartheta_0}{\vartheta_3} \frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_0(v)}. \end{cases}$$

又

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4},$$

従つて

$$k'^2 = 1 - k^2 = \frac{{\vartheta_3}^4 - {\vartheta_2}^4}{{\vartheta_3}^4}$$
 $= \frac{{\vartheta_0}^4}{{\vartheta_3}^4}.$ (第 34 節 (5) に依る)

これらを用ゐれば上の式は次の如くに書き直される.

$$\begin{cases}
\operatorname{sn} w = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)}, \\
\operatorname{cn} w = \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_0(v)}, \\
\operatorname{dn} w = \sqrt{k'} \frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_0(v)}.
\end{cases}$$

sn 函数の系統では K, iK' は既知と考へてよい. 依つて

$$\tau = \frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{iK'}{K} \quad (\mathfrak{F} 32 \, \mathfrak{P} (12))$$

がわかり従つて q もわかる. そこで ϑ 函数を用ゐて上式の如くに $\mathrm{sn, cn, dn}$ の函数値 が計算される.

39. 楕円積分の計算

回顧すれば吾々は第一章に於て楕円積分の研究から出発し、之を三種の標準形に分類したのであつた、然るにその中の第一種なるものに就いては或は数値計算法を論じ

39. 楕円積分の計算 103

或はその逆函数を考へなどして頗る詳細に研究したが、他の二種はや > 関却され来つた観がある。本節に於て吾々はこの残された二種を処理しようと思ふ。

楕円積分の第二種標準形を

$$\int_{0}^{z} \sqrt{\frac{1 - k^{2}z^{2}}{1 - z^{2}}} \, dz$$

とし、今こゝで

$$z = \operatorname{sn}(u, k)$$

なる置換を行へば

$$\int_0^z \sqrt{\frac{1 - k^2 z^2}{1 - z^2}} \, dz = \int_0^u \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u} d(\operatorname{sn} u) = \int_0^u \operatorname{dn}^2 u \, du$$

となる. 吾々は Jacobi に従つて

$$E(u) = \int_0^u \mathrm{dn}^2 \, u \, du \tag{1}$$

と命名することとしよう.

之を変形する準備として、第 29 節 (4) の加法公式に於て $v=\omega_3$ と置いた式を作ると、

$$\wp(u + \omega_3) + \wp(u) + e_3 = \frac{1}{4} \frac{\wp'(u)^2}{\{\wp(u) - e_3\}^2}$$
$$= \frac{\{\wp(u) - e_1\}\{\wp(u) - e_2\}}{\wp(u) - e_3},$$

従つて.

$$\wp(u+\omega_3) - e_3 = \frac{\{\wp(u) - e_1\}\{\wp(u) - e_2\}}{\wp(u) - e_3} - \wp(u) - 2e_3$$
$$= \frac{e_1e_2 + 2e_3^2}{\wp(u) - e_3} = \frac{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)}{\wp(u) - e_3},$$

故に

$$\frac{\wp(u+\omega_3) - e_3}{e_1 - e_3} = \frac{e_2 - e_3}{\wp(u) - e_3}.$$

この右辺を更に書き直せば

$$\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} \frac{e_1 - e_3}{\wp(u) - e_3} = k^2 \operatorname{sn}^2 w$$
 (第 32 節 (9), (11) による)

となる. 故に

$$dn^{2} w = 1 - k^{2} sn^{2} w = 1 - \frac{\wp(u + \omega_{3}) - e_{3}}{e_{1} - e_{3}}$$
$$= \frac{e_{1} - \wp(u + \omega_{3})}{e_{1} - e_{3}}.$$

そこで(1)に戻つて考へると

$$E(w) = \int_0^w \frac{e_1 - \wp(u + \omega_3)}{e_1 - e_3} dw \qquad (w = u\sqrt{e_1 - e_3})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} \int_0^u \left\{ e_1 - \wp(u + \omega_3) \right\} du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} \left\{ e_1 u + \zeta(u + \omega_3) - \eta_3 \right\}. \tag{2}$$

これで第二種積分が既知函数で表されたのである.

後に必要があるから(2)を更に積分したものを考へる.

$$\int_{0}^{w} E(w) dw = \int_{0}^{u} \left\{ e_{1}u - \zeta(u + \omega_{3}) - \eta_{1} \right\} du$$
$$= \frac{1}{2} e_{1}u^{2} + \log \frac{\sigma(u + \omega_{3})}{\sigma(\omega_{3})} - \eta_{3}u.$$

これの指数函数を $\Omega(w)$ と名づけると,

$$\Omega(w) = \exp \int_0^w E(w) \, dw = e^{\frac{1}{2}e_1 u^2} \sigma_3(u) \tag{3}$$

となる.

次に第三種の楕円積分を考へるのであるが、便宜上標準形を次の形にとる、

$$\int_0^z \frac{dz}{(1+nz^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}. \quad (n は常数)$$

z >でまた $z = \operatorname{sn} u$ と置けば、この積分は

$$\int_0^u \frac{du}{1 + n \operatorname{sn}^2 u}$$

となる. 併し之をそのまゝ考へるよりは次の如くに変化したものを考へる方が便利である. 先づ被積分函数から1を減じて

$$\int_0^u \frac{-n \operatorname{sn}^2 u \, du}{1 + n \operatorname{sn}^2 u}$$

 $n = -k^2 \operatorname{sn}^2 a (a は常数) と置いて$

$$k^2 \operatorname{sn}^2 a \int_0^u \frac{\operatorname{sn}^2 u \, du}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u}$$

とし、更に積分記号の前の常数を少し変更したものを

$$\Pi(u,a) = k^{2} \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \int_{0}^{u} \frac{\operatorname{sn}^{2} u \, du}{1 - k^{2} \operatorname{sn}^{2} a \operatorname{sn}^{2} u}$$
 (4)

と名づける. (4) をuで微分し、加法公式を用ゐて次の如くに計算する.

$$\frac{\partial}{\partial u}\Pi(u,a) = k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \frac{\operatorname{sn}^2 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u}$$

$$= \frac{1}{2}k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} u \left\{ \operatorname{sn}(u+a) + \operatorname{sn}(u-a) \right\}, \tag{5}$$

39. 楕円積分の計算 105

従つて

$$2\frac{\partial^{2}}{\partial u \partial a} \Pi(u, a) = k^{2} \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn} u \Big\{ \operatorname{sn}(u + a) + \operatorname{sn}(u - a) \Big\}$$

$$+ k^{2} \operatorname{sn} a \operatorname{sn} u \Big\{ \operatorname{cn}(u + a) \operatorname{dn}(u + a)$$

$$- \operatorname{cn}(u - a) \operatorname{dn}(u - a) \Big\}$$

$$= k^{2} \operatorname{sn} u \Big\{ \operatorname{sn}(u + a) \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a$$

$$+ \operatorname{sn} a \operatorname{cn}(u + a) \operatorname{dn}(u + a) \Big\}$$

$$+ k^{2} \operatorname{sn} u \Big\{ \operatorname{sn}(u - a) \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a$$

$$- \operatorname{sn} a \operatorname{cn}(u - a) \operatorname{dn}(u - a) \Big\}$$

$$= k^{2} \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u + 2a) \Big\{ 1 - k^{2} \operatorname{sn}^{2}(u + a) \operatorname{sn}^{2} a \Big\}$$

$$+ k^{2} \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u - 2a) \Big\{ 1 - k^{2} \operatorname{sn}^{2}(u - a) \operatorname{sn}^{2} a \Big\}.$$

$$(6)$$

一方に於て加法公式

$$\operatorname{sn}(u+v) = \frac{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 v}{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v - \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}$$

によつて計算すれば

$$dn^{2} a - dn^{2}(u+a) = k^{2} \left\{ \operatorname{sn}^{2}(u+a) - \operatorname{sn}^{2} a \right\}$$

$$= k^{2} \operatorname{sn}(u+2a) \left\{ \operatorname{sn}(u+a) \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a - \operatorname{sn} a \operatorname{cn}(u+a) \operatorname{dn}(u+a) \right\}$$

$$= k^{2} \operatorname{sn}(u+2a) \operatorname{sn} u \left\{ 1 - k^{2} \operatorname{sn}^{2}(u+a) \operatorname{sn}^{2} a \right\},$$

同様にして

$$dn^{2} a - dn^{2}(u - a) = k^{2} \operatorname{sn}(u - 2a) \operatorname{sn} u \left\{ 1 - k^{2} \operatorname{sn}^{2}(u - a) \operatorname{sn}^{2} a \right\}.$$

これらを(6)に代入すれば

$$2\frac{\partial^2}{\partial u \partial a} \Pi(u, a) = 2 \operatorname{dn}^2 a - \operatorname{dn}^2(u + a) - \operatorname{dn}^2(u - a).$$

C > に於て今度は a 及び u で逐次に積分することにする.

$$\frac{\partial}{\partial u}\Pi(u,a) = E(a) - \frac{1}{2}E(u+a) + \frac{1}{2}E(u-a) + C,$$

但しC は a に無関係なる常数であるが,例へば a=0 として見れば (1),(5) によつて C=0 なることが判る.更に積分すれば

$$\Pi(u,a) = uE(a) - \frac{1}{2}\log\Omega(u+a) + \frac{1}{2}\log\Omega(u-a) + \overline{C},$$

但し \overline{C} は u に無関係なる常数であるが,今 u =0 としで見れば \overline{C} = 0 なることを知る.此結果を(3)によつて更に書き直すために((3)の両辺の変数が同一でないことに

 $oldsymbol{106}$ 第四章 artheta 函数

注意), 上式のuをwとし, 又 $\alpha = a\sqrt{e_1 - e_3}$ とすれば,

$$\Pi(w,\alpha) = wE(\alpha) - \frac{1}{2}\log\Omega(w+\alpha) + \frac{1}{2}\log\Omega(w-\alpha)
= wE(\alpha) + \frac{1}{2}\log\frac{\Omega(w-\alpha)}{\Omega(w+\alpha)}.$$
(7)

然るに

$$E(w) = \frac{d}{dw} \log \Omega(w) = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} \frac{d}{du} \log \left\{ e^{\frac{1}{2}e_1 u^2} \right\}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} \left\{ e_1 u + \frac{\sigma_1'(u)}{\sigma_3(u)} \right\},$$

故に

$$E(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} \left\{ e_1 a + \frac{\sigma_3'(a)}{\sigma_3(a)} \right\}.$$

又

$$\frac{\Omega(w-\alpha)}{\Omega(w+\alpha)} = \frac{e^{\frac{1}{2}e_1(u-a)^2}\sigma_3(u-a)}{e^{\frac{1}{2}e_1(u+a)^2}\sigma_3(u+a)} = e^{-2e_1au}\frac{\sigma_3(u-a)}{\sigma_3(u+a)}.$$

これらを(7)に代入すれば次の結果を得る。

$$\Pi(w,\alpha) = u \left\{ e_1 a + \frac{\sigma_3'(a)}{\sigma_3(a)} \right\} - e_1 a u + \frac{1}{2} \log \frac{\sigma_3(u-a)}{\sigma_3(u+a)}$$
$$= u \frac{\sigma_3'(a)}{\sigma_3(a)} + \frac{1}{2} \log \frac{\sigma_3(u-a)}{\sigma_3(u+a)}.$$

これで第三種積分も亦既知函数で表されたのである.

40. 楕円の弧長

直交軸に関して

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

なる方程式で表される楕円の(0,b)から(x,y)までの弧長は

$$L = a \int_0^z \sqrt{\frac{1 - k^2 z^2}{1 - z^2}} dz, \quad z = \frac{x}{a}, \quad k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

なる積分によつて求められる. 之がそもそも楕円積分といふ名の起因で、従つてまた 楕円函数の"楕円"も之に起因するのである.

L は第二種の楕円積分で前節に述べた如くにも処理されるが、此所には今一つの別の方法を挙げる。先づ

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

と置けば、u は第 9、10 節又は第 21 節によつて計算される.そこで此 u を変数に用ゐることにすれば、

$$z = \operatorname{sn} u,$$

$$L = a \int_0^u \operatorname{dn}^2 u \, du$$

$$= au - a \int_0^u k^2 \operatorname{sn}^2 u \, du$$

40. 楕円の弧長 107

となることは明かである. さて之を次の如くに変形する. 第34節により

$$\frac{d}{dv}\log\vartheta_0(v) = \frac{d}{dv}\log\left\{-ie^{\pi i\left(v+\frac{\tau}{4}\right)}\vartheta_1\left(v+\frac{\tau}{2}\right)\right\}
= \pi i + \frac{d}{dv}\log\vartheta_1\left(v+\frac{\tau}{2}\right).$$
(1)

又 σ と ϑ_1 との関係から

$$\vartheta_1\left(v+\frac{\tau}{2}\right) = \sigma(u+\omega_3)\vartheta_1'(0)\frac{1}{2\omega_1}e^{-2\eta_1\omega_1\left(v+\frac{\tau}{2}\right)^2},$$

故に

$$\frac{d}{dv}\log\vartheta_1\left(v+\frac{\tau}{2}\right) = 2\omega_1\zeta(u+\omega_3) - 4\eta_1\omega_1\left(v+\frac{\tau}{2}\right).$$

之を (1) に代入すれば

$$\frac{d}{dv}\log\vartheta_0(v) = \pi i + 2\omega_1\zeta(u+\omega_3) - 4\eta_1\omega_1\left(v + \frac{\tau}{2}\right)$$

となる.

さてv, u, wの関係は

$$v = \frac{u}{2\omega_1}, \quad u = \frac{w}{\sqrt{e_1 - e_3}}$$

であるが、以下便宜上 $\vartheta_0(v)$ を w の函数と考へたものを $\Theta(w)$ と書くこととして

$$Z(w) = \frac{d}{dw} \log \Theta(w) = \frac{1}{2\omega_1 \sqrt{e_1 - e_3}} \frac{d}{dv} \log \vartheta_0(v)$$

と置けば,

$$Z(w) = \frac{1}{2\omega_1 \sqrt{e_1 - e_3}} \left\{ \pi i + 2\omega_1 \zeta(u + \omega_3) - 4\eta_1 \omega_1 \left(v + \frac{\tau}{2}\right) \right\}$$

$$= \frac{1}{2\omega_1 \sqrt{e_1 - e_3}} \left\{ \pi i + 2\omega_1 \zeta(u + \omega_3) - 2\eta_1 u - 2\eta_1 \omega_3 \right\}$$

$$= \frac{1}{2\omega_1 \sqrt{e_1 - e_3}} \left\{ 2\omega_1 \zeta(u + \omega_3) - 2\eta_1 u - 2\eta_3 \omega_1 \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} \left\{ \zeta(n + \omega_3) - \frac{\eta_1}{\omega_1} u - \eta_3 \right\}$$

従つて

$$Z'(w) = \frac{d^2}{dw^2} \log \Theta(w) = \frac{1}{e_1 - e_3} \left\{ -\wp(u + \omega_3) - \frac{\eta_1}{\omega_1} \right\}.$$

然るに前節に示した如く

$$\frac{\wp(u+\omega_3) - e_3}{e_1 - e_3} = k^2 \operatorname{sn}^2 w$$

であるから、之を上式に代入すれば

$$Z'(w) = -k^2 \operatorname{sn}^2 w - \frac{1}{e_1 - e_3} \left(e_3 + \frac{\eta_1}{\omega_1} \right).$$

之から直ちに

$$k^2 \operatorname{sn}^2 w = Z'(0) - Z'(w) \tag{2}$$

を得る.

108 第四章 ∂函数

さて

$$Z(w) = \frac{d}{dw} \log \Theta(w) = \frac{\Theta'(w)}{\Theta(w)},$$

従つて

$$Z'(w) = \frac{\Theta''(w)\Theta(w) - \Theta'(w)^2}{\Theta(w)^2},$$

故

$$Z'(0) = \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)}.$$

之を (2) に代入すれば

$$k^{2} \operatorname{sn}^{2} w = \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} - \frac{d}{dw} \frac{\Theta'(w)}{\Theta(w)},$$

従つて

$$\int_0^u k^2 \operatorname{sn}^2 u \, du = \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} u - \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}.$$

依つて求める弧長は

$$L = au - a \left\{ \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} u - \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} \right\}$$
$$= a \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} + au \left\{ 1 - \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} \right\}$$

となる.

41. 双曲線の弧長

直交軸に関し

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

なる双曲線の(a,0)から(x,y)までの弧長は

$$L = \frac{1}{b} \int_0^y \sqrt{\frac{(a^2 + b^2)y^2 + b^4}{y^2 + b^2}} \, dy$$

によつて求められる. こゝに

$$y = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tan \theta$$

と置けば

$$L = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int_0^\theta \frac{d\theta}{\cos^2 \theta \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \quad k^2 = \frac{a^2}{a^2 + b^2}$$

となる. また

$$u = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}$$

と置いて、 u を変数に用ゐれば

$$\sin \theta = \sin u, \quad \cos \theta = \cot u, \quad \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} = \operatorname{dn} u,$$

$$d\theta = \operatorname{dn} u \, du,$$

41. 双曲線の弧長 109

従つて

$$L = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int_0^u \frac{du}{\operatorname{cn}^2 u}$$

となる. 第16及び19節により

$$\frac{1}{\operatorname{cn} u} = \frac{ik}{k'}\operatorname{cn}(u + K + iK'), \quad k' = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

従つて

$$L = -\sqrt{a^2 + b^2} \int_0^u k^2 \operatorname{cn}^2(u + K + iK') du$$

となる. さて

$$k^{2} \operatorname{cn} u = k^{2} - k^{2} \operatorname{sn}^{2} u = k^{2} - \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} + \frac{d^{2}}{du^{2}} \log \Theta(u),$$

従つて

$$k^{2} \operatorname{cn}^{2}(u + K + iK') = k^{2} - \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} + \frac{d^{2}}{du^{2}} \log \Theta(u + K + iK')$$

である. 然るに Θ の意味は元来

$$\Theta(u) = \vartheta_0 \left(\frac{u}{2\omega_1 \sqrt{e_1 - e_3}} \right)$$

であるから

$$\Theta(u+K+iK') = \vartheta_0 \left(\frac{u}{2\omega_1 \sqrt{e_1 - e_3}} + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2} \right)$$
$$= \varepsilon \vartheta_2 \left(\frac{u}{2\omega_1 \sqrt{e_1 - e_3}} \right),$$

こゝに ε は u の一次式の指数函数である.こゝに現はれた ϑ_2 を u の函数と考へたものを $H_1(u)$ で表せば

$$k^2 \operatorname{cn}^2(u + K + iK') = k^2 - \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} + \frac{d^2}{du^2} \log H_1(u)$$

となる. 従つて

$$L = -\sqrt{a^2 + b^2} \int_0^u \left\{ k^2 - \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} + \frac{d^2}{du^2} \log H_1(u) \right\} du$$
$$= \sqrt{a^2 + b^2} \left\{ \left(\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} - k^2 \right) u - \frac{H_1'(u)}{H_1(u)} \right\}.$$

注意 Jacobi の記号では $\vartheta_0(v), \vartheta_1(v), \vartheta_2(v), \vartheta_3(v)$ を w の函数と考へたものを夫々 $\Theta(v), H(w), H_1(w), \Theta_1(v)$ で表すのである.

第五章 母数函数

42. 絶対不変式

第 24 節に於て定義した g_2 及び g_3 について更に考察する.

$$g_2 = 60 \sum' \frac{1}{(2h_1\omega_1 + 2h_3\omega_3)^4} = \frac{60}{(2\omega_1)^4} \sum' \frac{1}{(h_1 + h_3\tau)^4},$$

$$g_3 = 140 \sum' \frac{1}{(2h_1\omega_1 + 2h_3\omega_3)^6} = \frac{140}{(2\omega_1)^6} \sum' \frac{1}{(h_1 + h_3\tau)^6}$$

故に $(2\omega_1)^4 g_2$ 及び $(2\omega_1)^6 g_3$ は常数因数を無視すれば共に

$$\sum' \frac{1}{(m+n au)^{\alpha}}, \quad (m,n$$
 は整数, $\alpha>2)$

なる形を有する. 次に此級数が τ の上半面にある任意の閉面分に於て一様収斂なることを証明しよう.

今 $\tau = x + yi$ とし、又 ε, k を任意の正数とすれば

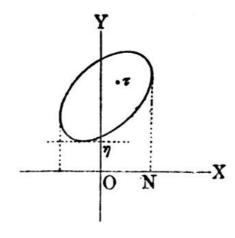
$$\begin{split} |m+n\tau|^2 - \varepsilon^2 |m+ni|^2 &= (m+nx)^2 + n^2 y^2 - \varepsilon^2 (m^2 + n^2) \\ &= m \left(1 - \frac{1}{k^2} - \varepsilon^2\right) + \left(\frac{1}{k} m + knx\right)^2 \\ &+ n^2 \bigg\{ y^2 - (k^2 - 1)x^2 - \varepsilon^2 \bigg\}, \end{split}$$

 $C > C k > 1 且 \epsilon$ を十分小なる正数とすれば第一の括弧内は正となる,第二の括弧内は勿論負にならず,また今考へる閉面分に於ては $|x| \le N$, $|y| \ge \eta$ なる如き常数 N,η が存在するから k,ε を夫夫 1,0 に十分近くとれば上の最後の括弧 $\{ \}$ 内も正となる.依つて結局 ε が十分小なる正数ならば

$$|m+n\tau|>\varepsilon|m+ni|$$

ならしめ得る, 従つて

$$\sum' \frac{1}{|(m+n\tau)^{\alpha}|} < \frac{1}{\varepsilon^{\alpha}} \sum' \frac{1}{|(m+ni)^{\alpha}|}.$$



第33図

この右辺が収斂なることは 65-66 頁の論法で明かである. 故に $\sum' \frac{1}{(m+n\tau)^{\alpha}}$ は一様収斂である.

112 第五章 母数函数

従つて此級数を τ の函数と考へれば上半面内の任意の面分に於て(略言すれば、上半面内に於て)常に正則である.

 g_2 又は g_3 自身は τ のみの函数でなく ω_1 にも関係するが, $g_2:g_3$ の如きものを考へれば之は τ のみの函数で,分母が 0 とならぬ限り上半面内に於て正則である.分母が 0 とならぬ様な函数を作るには

$$J(\tau) = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2} \tag{1}$$

とすればよい、この分母は数字因数を無視すれば方程式

$$4\wp^3 - g_2\wp - g_3 = 0$$

の判別式に他ならぬが,この方程式の根は e_1, e_2, e_3 で互に相異なる(第 24 節),従 つて判別式は決して 0 とならぬ.故に $J(\tau)$ **は上半円内の全部に於て正則なる函数である.**

 $J(\tau)$ の数値を考へるには之を $q=e^{\tau\pi i}$ の函数として表す方が便利なこともある.それには 101 頁の式から

$$g_2 = \frac{1}{12} \left(\frac{\pi}{\omega_1} \right)^4 \left\{ 1 + 240(q^2 + 9q^4 + \cdots) \right\},$$

$$g_3 = \frac{1}{216} \left(\frac{\pi}{\omega_1} \right)^6 \left\{ 1 - 504(q^2 + 33q^4 + \cdots) \right\}$$

を出してJの定義の式(1)に代入すればよい.計算の結果は

$$J(\tau) = \frac{1}{12^3} \left(\frac{1}{q^2} + 744 + 196884q^2 + \dots \right)$$
 (2)

となる.

 g_2 及び g_3 は共に 0 以外のすべての週期の或る負冪の総和であるから ω_1, ω_3 に

$$\omega_1' = a\omega_1 + b\omega_3$$
, $\omega_3' = c\omega_1 + d\omega_3$ $(a, b, c, d$ は整数, 且 $ad - bc = 1$)

なる置換を行つても不変である(35 頁定理 6 参照,但しそこには $ad-bc=\pm 1$ とあるが, $\tau=\frac{\omega_3}{\omega_1}$ 常に上半面にある様にすれば -1 は採れないのである).従つて $J(\tau)$ は τ に

$$\tau' = \frac{\omega_3'}{\omega_1'} = \frac{c\omega_1 + d\omega_3}{a\omega_1 + b\omega_3} = \frac{c + d\tau}{a + b\tau}$$

なる一次変換を行つても不変である, 即ち

$$J\left(\frac{c+d\tau}{a+b\tau}\right) = J(\tau), \quad ad - bc = 1 \tag{3}$$

依つて $J(\tau)$ のことを絶対不変式といひ、斯様な変換を総称して**母数変換** (Modular transfomation) といふ、今後 (3) の如き変換を $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ なる記号で示す。ad-bc=1 なる整数は無数にあるから母数変換は無限に多くある、而してその全体は群を作る、之を母数群といふ、此群のすべての原素は特別なる二原素

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

42. 絶対不変式

113

即ち

$$\tau' = \tau + 1, \quad \tau' = -\frac{1}{\tau} \tag{4}$$

によつて組成される. その証明は次の通り.

先づ任意の一つの母数変換を

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とすれば,

$$S^{\pm}M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pm 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ \pm a + c & \pm b + d \end{pmatrix},$$
$$TM = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix}$$

である. 故に,与へられた M に於て若し |b|>|d| ならば M の代りに TM を考へる ことにして,結局 $|b|\leq |d|$ なる場合のみを考へればよい.そこで正又は負の α を適当 にとり

$$S^{\alpha}M = \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha a + c & \alpha b + d \end{pmatrix}, \quad |\alpha b + d| < |b|$$

ならしめ、その結果を

$$S^{\alpha}M = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

と記す. もし $d' \neq 0$ ならば, この結果に T なる変換を行つて

$$TS^{\alpha}M = \begin{pmatrix} c' & d' \\ -a' & -b' \end{pmatrix}.$$

次に β を適当にとり

$$S^{\beta}TS^{\alpha}M = \begin{pmatrix} c' & d' \\ \beta c' - a' & \beta d' - b' \end{pmatrix}, \quad |\beta d' - b'| < |d'|$$

ならしめる. 斯様な手続を繰り返して常に右下の端の数の絶対値を減少せしめる様に すれば遂には

$$\cdots TS^{\beta}TS^{\alpha}M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & 0 \end{pmatrix}$$
 (5)

なる形となる. 然るときは

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix} = -b_1 c_1 = 1,$$

従つて $b_1 = 1$, $c_1 = -1$ 又は $b_1 = -1$, $c_1 = 1$. しかし行列の四数の符号を悉く同時に変じても変換としては同一であるから、いま後者の値をとれば

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

従つて

$$T\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a_1 & 1 \end{pmatrix} = S^{-a_1}.$$

故に(5)から

$$M = S^{-\alpha}TS^{-\beta}T \cdots TS^{-a_1}$$

を得る.

43. 基本領域

楕円函数例へば $\wp(u)$ は $u'=u+2\omega_1, u'=u+2\omega_3$ なる二変換及びそれから組成されるすべての変換によつて不変である. $J(\tau)$ も (4) の二変換及びそれから組成される変換によつて不変である点は楕円函数と似て居るが,然らば週期平行四辺形に対応するものは如何なる円形であるか,次に之を研究しよう.

au に任意の母数変換 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を行つた結果を

$$\tau' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tau = \frac{c + d\tau}{a + b\tau}$$

とするとき, τ と τ' とを母数群に関して互に**同等**であるといふ. τ 平面の上半面に適当なる面分 D をとり,

- (i) D内のの何れの二点も互に同等でなく,
- (ii) 上半面の何れの点も必ず D内の一点と同等である

様にしたとき、その D を母数群の(又は函数 $J(\tau)$ の)**基本領域**といる。D は函数 $J(\tau)$ に関して宛かも楕円函数に於ける週期平行四辺形の如き役目をなすものである。

母数群の変換はすべて $\tau' = \tau + 1$ 及び $\tau' = -\frac{1}{\tau}$ で組成される。前者から考へれば D なる面分は虚軸に平行なる間隔 1 の平行線で界されることが想像される,又後者から 考へれば D は単位円で界されることも想像される。そこで今 $\tau = x + yi$ と置き,

$$-\frac{1}{2} \le x < \frac{1}{2}, \quad x^2 + y^2 \ge 1$$

なる面分をとつて D の候補者とし、便宜上之を矢張り D と呼ぶことにする.

先づ D が (i) の性質を有するかどうか を調べる. それには D 内の τ と同等なる

$$\tau' = \frac{c + d\tau}{a + b\tau}$$

が $(\tau' = \tau)$ の場合を除き)必ず D の外に 出るかどうかを見ればよい.次に四つの 場合に分けて之を吟味する.

(I) b = 0 なるとき. ad - bc = 1 から a = d = 1. (a, b, c, d 全部の符号を変じても差支ないから a = d = -1 はとらぬことにする.) 従つて

$$\tau' = \tau + c$$
.

第 34 図

故にc = 0なる限り τ' はDの外にある.

(II) b=1 なるとき. c=ad-1 となる, 従つて

$$au'=d-rac{1}{1+ au}$$
. 故に $| au'-d|=rac{1}{| au-(-a)|}$.

43. 基本領域 115

a は整数であるから,D 内の τ と -a との間の距離 $|\tau - (-a)|$ は一般に 1 より大(図を見よ),従つて $|\tau - d| < 1$.故に τ' は一般に D の外にある.たゞこゝに例外となるのは a = d = 0 なる場合で,そのときは τ と τ' とが共に D の界線なる単位円の弧上にある.之を避けるには円弧の中 $-\frac{1}{2} \le x \le 0$ なる部分のみを D に属せしめることにすればよい.さうしてもなほ τ と τ' とが共に D に属する場合が三つある.それは

で、この他にはない.故に規約的に i, ρ なる点は夫々 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ だけ D に属すると考へることにする.

- (III) b = -1 なるとき. 係数部の符号を変すれば (II) に帰する.
- (IV) |b| > 1 なるとき. $|b| \ge 2$ である. さて一般に

$$\tau' - \frac{d}{b} = -\frac{1}{b^2} \frac{1}{\tau + \frac{a}{b}}.$$

然る $\frac{a}{b}$ が如何なる有理数であつても, τ が D にあるならば

$$\left|\tau + \frac{a}{b}\right| \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$$

なることは図から明かである. 依つて

$$\left| \frac{\sqrt{3}}{2} \left| \tau' + \frac{d}{b} \right| \le \frac{1}{b^2} \le \frac{1}{4},$$

故に

$$\left|\tau' + \frac{d}{b}\right| \le \frac{1}{2\sqrt{3}} < \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

即ち τ' は実軸上の一点 $\frac{d}{b}$ から $\frac{\sqrt{3}}{2}$ よりも小なる距離にある,故に勿論 D 内にはない.以上の研究によつて D の界線の中第 34 図に太く画いた部分だけを之に属せしめれば,丁度 (i) の性質を有することが判つた. $(i,\rho$ の二点だけは上記の如き特別扱にする.)

D の各点に

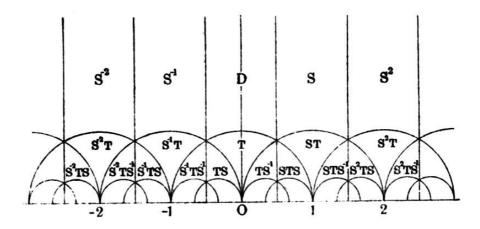
$$S: \quad \tau' = \tau + 1$$

なる変換を行へば、丁度 D の右隣にある同形同大の面分内に移る、依つて此面分を S と呼ぶ. S を繰り返して行へば次々に S^2, S^3, \cdots を得る、又その逆変換 $\tau' = \tau - 1$ を 考へれば S^{-1}, S^{-2}, \cdots を得る、又

$$T: \quad \tau' = -\frac{1}{\tau}$$

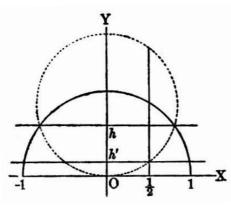
及び之とSとで組成された各変換についても同様に考へると、結局次の様な図が出来る.

116 第五章 母数函数



例へば ST とあるのは T を先にし S を後にする 意. その他もすべて右から先に行ふものとする.

第35図



第 36 図

る. 然るに計算して見ると

厳密に考へれば此所に注意すべき件が 二つある。第一は D から斯様にして次 第に作られる面分で τ の上半面が全く蔽 はれることである。今暇りに y > h(0 < h < 1) なる部分が D, S, T, \cdots で全部蔽 はれたとすれば,それらに更に T を行つ た TD, TS, T^2, \cdots 即ち T, TS, D, \cdots で 図の点線の円の内部が蔽はれる。この円 と $\frac{1}{2}$ との交点の縦線を h' とすれば,上記 の T, TS, D, \cdots 及び之に S の冪を行つ たもので y > h' なる部分が全部蔽はれ

$$h' = \frac{1 - \sqrt{1 - h^2}}{2h} < \frac{h}{2}.$$

之によつて x 軸に何程近い点でもつひには蔽はれることが判る.

第二には D,S,T,\cdots 等の面分が互に重なり合はぬことである 何となれば,若し仮りに A,B なる二面分が重なり合ふ部分を有するならば,その部分に一点 τ' をとれば,D 内の或る二点 τ_1,τ_2 に対して $\tau'=A\tau_1,\tau'=B\tau_2$,従つて $\tau_1=A^{-1}B\tau_2$,即ち D 内に互に同等なる二点があることになつて前に証明したことに反する.(σ,ρ と同等なる点は例外である.)

斯様にして上半面が全部蔽はれることからして D が (ii) の性質をも有すること明かである.

之に依つて見ると上来述べ来つた如く D の界線を半分だけ之に属すると考へれば、これ即ち一つの基本領域である. (D に限らず S,T,\cdots 等の何れを取つても基本領域である.)

44. $J(\tau)$ の値 117

J(au) の値 44.

基本領域 D に於ける函数 $J(\tau)$ の値について次に研究する. 先づ D 内の特別なる点 $\tau = i$ に於ては $g_3 = 0$ (72 頁), 従つて

$$J(i) = 1.$$

同様に考へて $\tau = \rho$ に於ては $g_2 = 0$, ⁽¹⁾従つて

$$J(\rho) = 0.$$

次に $\tau = x + yi$ とすれば,

$$q = e^{\tau \pi i} = e^{-y\pi} \cdot e^{x\pi i}.$$

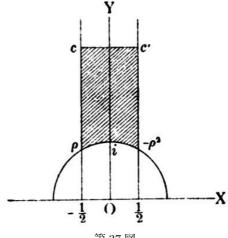
故に $y \to \infty$ なるとき $|q| = e^{-y\pi} \to 0$. 従つて前々節 (2) により $J(\tau) \to \infty$ なること を知る. 即ち D 内に於て $\tau \to \infty$ なるときは

$$J(\infty) = \infty$$
.

故に今 a を任意の有限値とすれば $J(\tau) =$ a なる τ の虚部は限りなく大ではない. 故に x 軸より十分大なる距離に之を平行 に cc' を引けば $J(\tau) = a$ になる τ は、若 しありとすれば、cc' 以下の D の部分に あると考へてよい. 今特にa = 0.1とし、 $J(\tau) = a$ なる如き τ が D の界線上には ないとすれば、内部にある τ の箇数は次 の式で与へられる.

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{J'(\tau)}{J(\tau) - a} d\tau,$$

積分路は図の陰影を施した部分の周で,



第37図

その内部を左手に見る様に一周するのである. 此積分を周の部分によつて分ければ

$$N = 2\pi i \left\{ \int_{\rho}^{i} + \int_{i}^{-\rho^{2}} + \int_{-\rho^{2}}^{c'} + \int_{c'}^{c} + \int_{c}^{\rho} \right\}.$$

然るに $J(\tau)$ の性質により明かに

$$\int_{\rho}^{i} + \int_{i}^{-\rho^{2}} = 0, \quad \int_{c}^{\rho} + \int_{-\rho^{2}}^{c'} = 0.$$
 (1)

故に

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{J'(\tau)}{J(\tau) - a} d\tau = \frac{1}{2\pi i} \left[\log\{J(\tau) - a\} \right]_{c'}^{c}$$

⁽¹⁾ $\sum rac{1}{w^4}$ に於て $w=2\omega_1(m+n
ho)$, $2\omega_1(-n+\overline{m-n}
ho)$, $2\omega_1(-m+n-m
ho)$ なる三項の和が 0となることに注意せよ.

118 第五章 母数函数

今yが十分大なりとすれば、前々節の(2)により、

$$J(\tau) - a = \frac{1}{12^3} e^{2y\pi} \cdot e^{-2x\pi i} (1 + \varepsilon),$$

 $C > C y \to \infty$ なるとき $\varepsilon \to 0$ である. 従つて

$$\left[\log\{J(\tau)-a\}\right]_{c'}^{c} = 2\pi i + \left[\log(1+\varepsilon)\right]_{c'}^{c} \to 2\pi i.$$

之から N=1 を得る、即ち $J(\tau)$ は a なる値を D の内部に於て唯一回とるのである.

次に $J(\tau) = a \ (a = 0,1)$ なる τ が D の界線上にも有るかも知れぬと考へても、その箇数は有限で、又 $\tau = \rho, i$ でないことは明かである。依つてその場合にはそれらの τ を中心として図の如き円弧を画き、これを積分路に入れるのである,但し A' は A に S なる変換を行つたもの、即ち A' = SA、同様の意味で B' = TB である。併し斯様な積分路をとつても (1) は矢張り成立する。従つて矢張り N = 1 なる結果を得る。次には $J(\tau) = 1$ なる τ を考へる。既に知れる如く J(i) = 1 であるから、今 i 以外に斯くの如き τ が幾つあるかを調べればよい。依つて N を計算する積分路を第 39 図の太い線の如くにする,但し必要あらば $\overline{c}\rho$ 等の途中に前の図の如く瘤が附いて居るとしてもよい。その積分を簡単にすれば

$$\int_{P} + \int_{c'}^{c} = \int_{P} +2\pi i$$

となる. この第一項の積分を次に考へる.

TB=B' とすれば B+B' は i を負の向きに一周する路であつて

$$\int_{B+B'} = \int_{B} + \int_{B'} = 2 \int_{B}.$$

一方に於て B を十分小とすれば B+B' の内部で $J(\tau)-1=0$ なる点は i のみとなり,且

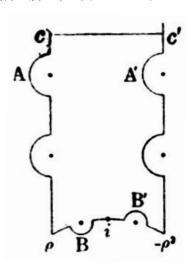
$$J(\tau) - 1 = \frac{27g_3^2}{g_2^3 - 27g_3^2}$$

であるから, i に於て $J(\tau) - 1 = 0$ 即ち $g_3^2 = 0$ となる位数は 2 の倍数である, 之を仮りに 2ν とすれば

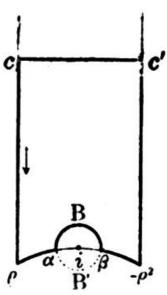
$$\int_{B+B'} = -2\pi i.2\nu.$$

依つて

$$\int_{B} = -2\pi i.\nu,$$



第 38 図



第 39 図

44. $J(\tau)$ ϕ @ 119

従つて

$$N = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_B +2\pi i \right) = 1 - \nu.$$

然るに $N \ge 0$, $\nu \ge 1$ でなければならぬ. 依つて

$$N = 0, \quad \nu = 1.$$

これで $J(\tau)=1$ なる点は D 内に i の他にはなく,又 $\tau=i$ に於ては第二位に $J(\tau)=1$ となることが判る.

最後に $J(\tau)=0$ なる場合を考へるこれは ρ 以外の点だけを調べればよいから図の太い線の如き積分路をとる. 之を簡単にすれば

$$\int_A + \int_B + \int_c^{c'} = \int_A + \int_B + 2\pi i$$

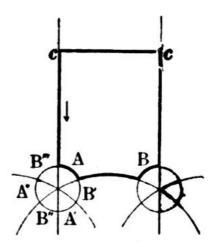
となる. 始めの二つの積分を計算するために

$$A' = TSA, \quad A'' = S^{-1}TA,$$

$$B' = TB, \quad B'' = S^{-1}TS^{-1}B, \quad B''' = S^{-1}B$$

とし, 更に

$$C = A + B' + A' + B'' + A'' + B'''$$



第 40 図

とすれば

$$\int_C = 3\left(\int_A + \int_B\right).$$

C の内部にある $J(\tau)$ の零点は ρ で, $J(\tau)=0$ 即ち $g_2{}^3=0$ となる位数は 3 の倍数である,之を 3ν とすれば.

$$\int_{A} + \int_{B} = -2\pi i \cdot \nu,$$

従つてまた

$$N = 1 - \nu$$

となり、之から

$$N=0, \quad \nu=1$$

を得る. 故に $J(\tau)$ は D 内では $\tau = \rho$ に於てのみ 0 となり、その位数は 3 である.

以上を総括すると、 $J(\tau)=a$ なる τ は、 $a \neq 0,1$ ならば D 内に唯一つ、a=1 ならば二つ(共に $\tau=i$)、a=0 ならば三つ(共に $\tau=\rho$)ある.しかし規約として i は $\frac{1}{2}$ だけ、 ρ は $\frac{1}{3}$ だけ D に属すると考へれば結局 $J(\tau)$ は一つの基本領域に於てあらゆる有限値を一度づゝとるといふことが出来る.

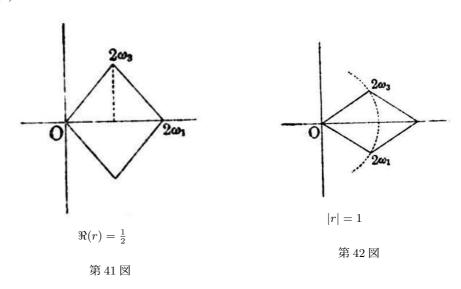
これから直ちに $J(\tau)=J(\tau')$ **なるときは**, τ **と** τ' **とは同等であること**が判る. (この逆は前節に述べた如く J の定義から明かである.) 何となれば, 一つの τ と同等なる τ' は各基本領域内に一つづゝあつて, その τ' に対しては, 既に知る如く $J(\tau')=J(\tau)$ である. もし此他に $J(\tau'')=J(\tau)$ なる τ'' ありとすれば, その τ'' のある基本領域内では J が二点 τ' 及び τ'' で同一の値をとることとなり, 上に証明した所に反する.

120 第五章 母数函数

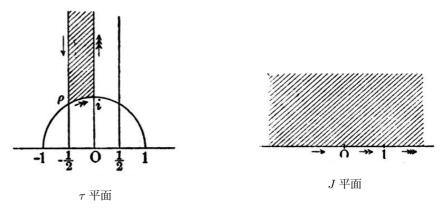
次に τ 平面と $J(\tau)$ の平面との対応を考へて見よう.

先づ τ 平面の $x=\Re(\tau)=0$ なる直線を考へる。このとき τ は純虚数である,而して今 ω_1 と ω_3 との比のみを考へればよいのであるから, ω_1 を実数としても差支ない。然すればすべての週期点は実軸に関して対称である。従つて g_2,g_3 は共に実数,従つて又 $J(\tau)$ も実数でなければならぬ。

 $\Re(\tau)=\pm\frac{1}{2}$ なる場合にも ω_1 を実数とすれば週期点は実軸に関して対称となる(第 41 図).又 $|\tau|=1$ なるときは ω_2 を実数とすれば同様(第 42 図).故に何れにしても $J(\tau)$ は実数である.



之に依つて見ると τ 平面上の D なる基本領域の周囲及び y 軸は, $J(\tau)$ 平面の実軸に対応する事を知る.加之,前に証明した如く一対一であり,且 $\tau=\infty, \rho, i$ なるとき



第 43 図

 $J=\infty,0,1$ なることを参酌すれば、上の如き対応図を得る.

之から鏡像の理によつて他の基本領域と J 平面との対応が得られ、結局 τ の上半面は無数に多くの J 平面が ∞ , 0, 1 を分岐点として連結された Riemann 面に対応することが判る.

45. 母数函数 121

45. 母数函数

 $J(\tau)$ の性質は上来研究した所によつて判つた,そこで今 $J(\tau)$ の任意の有理函数 $R\{J(\tau)\}=f(\tau)$ なるものを考へれば,之が次の三つの性質を有することは明かである.

- (I) τ に母数変換を行つても $f(\tau)$ は不変である.
- (II) τ が D 内にあるとき, $\tau = \infty$ だけを除いて, $f(\tau)$ は有理型である. 他の基本領域に於ても之に準ずる.
- (III) τ が D 内にあつて ∞ に赴くとき、 $f(\tau)$ は有限確定の極限値を有するか又は無限大となる. (不確定とならぬこと.)
 - (IV) $f(\tau)$ は D に於てすべての値を同じ度数だけとる.

逆に、以上の中 (I)、(II)、(III) の三性質を有する τ の一価解析函数 $f(\tau)$ は必ずや $J(\tau)$ の有理函数で、従つて (IV) も成立するのである、次に之を証明する.

先づ斯様な函数 $f(\tau)$ を J の函数と考へて $f(\tau) = F(J)$ とする. τ 平面上の D は J 平面を実軸の $(-\infty,1)$ の部分で切り割いたものに対応する, F(J) のは (II) によつて此所で有理型である. 然るに若し $f(\tau)$ が (I) の性質を有すれば, 今云つた J 平面の切れ目の両岸で F(J) は全く同じ値をとり正則に接続される, 従つて F(J) は J の函数として通常の数平面に於て点 ∞ 以外で有理型である. 依つてその上に (III) が成立すれば F(J) は確かに J の有理函数である.

次には $f(\tau)$ の条件を緩和して, (I) の代りに

(I') τ にあらゆる母数変換を行ふとき $f(\tau)$ は有限箇(例へば m 箇)だけの相異なる函数に変ずるとし、(II) 及び (III) は前の通りとしたとき、 $f(\tau)$ は如何なる函数であるかを考へる。斯様な函数を総称して**母数函数** (Modular function) といふ, $J(\tau)$ 及びその有理函数は母数函数の m=1 なる特別の場合である。

今 $f(\tau)$ の τ にあらゆる母数変換を行つて得る相異なる結果を

$$f(\tau), f_1(\tau), f_2(\tau), \dots, f_{m-1}(\tau)$$
 (1)

とする. 母数変換全部の集合 (即ち母数群) を G とし、その中で $f(\tau)$ を不変ならしめる変換全部の作る分群を G_0 とすれば、

$$G = G_0 + H_1 G_0 + H_2 G_0 + \dots + H_{m-1} G_0$$

= $G_0 + G_0 H_1^{-1} + G_0 H_2^{-1} + \dots + G_0 H_{m-1}^{-1}$.

 $C > lc H_1, H_2, \cdots$ は夫々 $f(\tau)$ を $f_1(\tau), f_2(\tau), \cdots$ に変ずる一つの母数変換である. $f_1(\tau)$ を不変ならしめる母数変換の全部は $H_1G_0H_1^{-1}$ で与へられ、之は G_0 と同型である. 而して $f_1(\tau)$ の τ にあらゆる母数変換を行へば矢張り m 箇の函数 (1) を得る. $f_2(\tau)$ 以下の函数についても同様である. 故に (1) なる m 箇の函数は何れも同等の資格を有する母数函数である.

今此等を根とする方程式

$$\{x - f(\tau)\}\{x - f_1(\tau)\} \cdots \{x - f_{m-1}(\tau)\}$$

= $x^m + R_1 x^{m-1} + \cdots + R_m = 0$

122 第五章 母数函数

を考へれば、係数 R は (1) なる函数の対称式であるから任意の母数変換によつて不変なることは容易に証明される、従つて R は $J(\tau)$ の有理函数である、故に

母数函数はすべて $J(\tau)$ の代数函数である.

又逆に次の定理が成立する.

f(au) が au の上半面に於て一価解析で且 J(au) の代数函数ならば、f(au) は母数函数である.

何となれば斯様な $f(\tau)$ は明かに (I') 及び (II), (III) の性質を有するからである.

さて第 43 節で母数群 G 又は函数 $J(\tau)$ の基本領域なるものを定義したが,G の代りに G_0 を用ゐて同節の (i),(ii) と同様の条件で定められる面分を分群 G_0 又は之に対応する母数函数 $f(\tau)$ の基本領域といふ.

 G_0 の基本領域を求めるには,G の一つの基本領域 D をとり,之に $H_1^{-1}, H_2^{-1}, \cdots$ を行つて得る領域を D に併合すればよい.但し実際には基本領域の形を都合よくするために必ずしも此方法によらず,之と同様の意味を有する適宜の方法をとることもある.

次節に一例をとつて説明する.

46. **函数** $\lambda(\tau)$

函数 $\wp(u | 2\omega_1, 2\omega_3)$ に於て、 ω_1, ω_3 に

$$({\omega_1}',{\omega_3}') = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ({\omega_1},{\omega_3}) \quad \begin{pmatrix} a,b,c,d & は整数, \\ \exists & ad-bc=1 \end{pmatrix}$$

なる変換を行つても此函数は不変である. 故に今 $\wp(\omega_1)=e_1$ に於て $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ なる変換を行つたとすれば,

$$a \equiv 1, \quad b \equiv 0 \pmod{2}$$

なるとき、而してそのときに限り、 e_1 は不変である.

同様の理で、 e_2, e_3 は夫々

$$a + c \equiv 1, \quad b + d \equiv 1 \pmod{2}$$

及び

$$c \equiv 0, \quad d \equiv 1 \pmod{2}$$

なるときに限り不変である.

今 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ をa,b,c,dの奇偶によつて分類すれば次の六種となる,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

注意 すべて 2 を法として考へる, ad-bc=1 なることに注意を要する.

この六種の変換によつて e_1, e_2, e_3 は次表の如くに変る. 従つて

$$\lambda(\tau) = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}$$

46. 函数 $\lambda(\tau)$ 123

なる函数は表の最下欄にある如くに変わる.

			$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
e_1	e_1	e_3 e_2 e_1	e_2	e_2	e_1	e_3
e_2	e_2	e_2	e_3	e_1	e_3	e_1
e_3	e_3	e_1	e_1	e_3	e_2	e_2
λ	λ	$1 - \lambda$	$\frac{1}{1-\lambda}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{\lambda}{\lambda - 1}$	$\frac{\lambda-1}{\lambda}$

故に $\lambda(\tau)$ は一つの母数函数で、前節の記号を用ゐれば

$$m=6$$
, $G_0=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の群

である.

 $\lambda \geq J \geq 0$ 間には次の関係がある.

$$J = \frac{4}{27} \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2 (\lambda - 1)}.$$

(之は λ 及び J の定義によつて容易に験証される.) 故に λ は J の六次の代数函数である.

89 頁 (9) によれば、 $\lambda=k^2$ 即ち sn 函数の母数の平方に等しい.此類の函数を母数 函数と呼ぶのは之に起因する.

最後に $\lambda(\tau)$ の基本領域を求めて見よう.

母数群を作り出すもとになつた二原素S,Tは

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

である. 従つて

$$TS = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$STS = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$S^{-1}T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

即ち $1, S, T, TS, STS, S^{-1}T$ は丁度相異なる六つの種類を代表する.

故に $\lambda(\tau)$ の基本領域としては第 35 図に於て $1, S, T, TS, STS, S^{-1}T$ の逆に相当する $1, S^{-1}, T, S^{-1}TS^{-1}, TS$ なる六区を合せたものをとればよい訳であるが、それでは形が簡単でないから、次の如き手段をする.

先づDを虚軸によつて二等分し、その左半はそのまゝ取り、右半の代りにはそれにTを行つたもの(即ちTの左半)を取ることとし、斯くして出来た新らしい領域を以下Dと呼ぶことにする。

この新らしい 0 は次の三つの線で囲まれる,

$$x = 0$$
, $x = -\frac{1}{2}$, $(x+1)^2 + y^2 = 1$,

次に、上記六種の代表者たる変換として

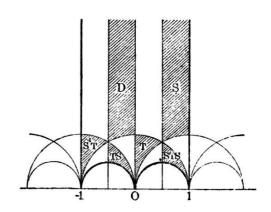
1, S, T, TS, STS,
$$S^{-1}T$$

を挙げたが、今仮りにこれらの各の逆をとつても矢張り全体として上記の六種を代表 することは容易に験証される.

以上の二件を考に入れて $\lambda(\tau)$ の基本領域を作るならば、新らしい D 及び之に $1, S, T, TS, STS, S^{-1}T$ を行つて得られる区域を合併すればよい。その結果は第 44 図に太い線で界した面分になる.

この基本領域を E と名づける. $\lambda(\tau)$ は E に於てあらゆる値を一度 づゝとる.

何となれば、今a を任意の一数とし、 $\lambda(\tau) = a$ なる τ があつたとすれば、その τ に対しては



第 44 図

$$J(\tau) = \frac{4}{27} \frac{(a^2 - a + 1)^3}{a^2(a - 1)^2} \quad (= A \ と置く)$$

となる. $J(\tau)=A$ なる τ は既に知れる如く D,S,T,\cdots 等の各区内に一つづゝあり、従つて E 内には全部で六つある. 併しそれらの点ですべて $\lambda(\tau)=a$ となるのではないが、全体として

$$\lambda(\tau) = a, \ 1 - a, \ \frac{1}{1 - a}, \ \frac{1}{a}, \ \frac{a}{a - 1}, \ \frac{a - 1}{a} \tag{1}$$

なる値を与へるのである. 之に依つて一般に $\lambda(\tau)=a$ なる τ が E 内に常に唯一つあることを知る.

この証明は (1) なる六つの値がすべて相異なると考へてのことであるが、この中に相等しいものがあるのは

$$a = 0, 1, \infty; -1, 2, \frac{1}{2}; \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

の場合に限り、従つて

$$A=0, 1, \infty$$

なる場合に限る、これは特別に取扱ふべきこと $J(\tau)$ の場合と同様である.

以上によつて τ 平面の E が λ 平面の全部と一対一の対応をなすことを知つたが,その対応を更に詳しく調べて見よう.

先づ τ 平面の虚軸を考へると、その上では

$$q = e^{\tau \pi i} = e^{-\pi y} > 0, \quad (\tau = x + yi)$$

46. 函数 $\lambda(\tau)$ 125

即ち q は正の実数である. 従つて

$$\begin{split} \lambda(\tau) &= \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = \left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}\right)^4 \quad (第 37 \, \mathbb{f}) \\ &= \left(\frac{2q^{\frac{1}{4}} + 2q^{\frac{9}{4}} + \cdots}{1 + 2q + \cdots}\right)^4 > 0, \end{split}$$

即ち $\lambda(\tau)$ も亦正の実数である。而して特に

$$y \to \infty$$
 なるとき $q \to 0$, $\lambda(\tau) \to 0$.

又 $\tau = i$ なるときは第 25 節により $e_3 = -e_1, e_2 = 0$, 従つて

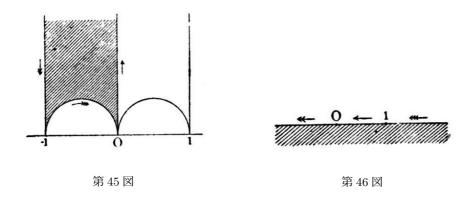
$$\lambda(i) = \frac{e_1}{e_1 + e_2} = \frac{1}{2}.$$

之によつて τ 平面の虚軸中の i より上の部分は λ 平面の $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ なる実軸の部分に対応 することを知る.

i より上の虚軸に T を行へば i と 0 との間の虚軸を得る,而して之に対する λ の変化は第 123 頁の表により $1-\lambda$ である. 従つて τ の (0,i) のなる虚軸の部分は λ の $\left(1,\frac{1}{2}\right)$ なる実軸の部分に対応することを知る.

これで τ の虚軸の写像が判つたから、次には之に S^{-1} を行つて見ると、 τ の x=-1 なる直線が λ の実軸の $(0,-\infty)$ なる負の部分に対応することが判る. x=1 についても同様である.

更に x=1 に T を行つて見れば、 τ の (-1,0) を直径とする上半円周は λ の $(1,\infty)$ なる実軸の部分に対応することか判る.



以上を総合して上の対応図を得る. 第 45 図は τ 平面, 第 46 図は λ 平面を示す.

第六章 補遺

47. sn 函数の一価性

第 11 節で証明を省略しておいた sn 函数の一価性を次に証明する,即ち c を任意の一数とするとき

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = c$$

なる如き積分路 (0,-z) が R 面上に必ず一種だけ見出されることを示さんとするのである.

先づ R 面に A,B なる二つの切断線を入れて R' 面とする(第 6 節). A,B の交点に集まつた B 面の四隅を図の如く $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ と名づければ

$$\int_{\alpha}^{\beta} = \int_{(A)} = 4K,$$

$$\int_{\gamma}^{\delta} = \int_{(-A)} = -4K,$$

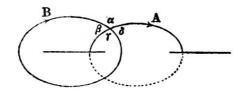
依つて今

$$v = \frac{1}{4K}u$$

と置けば、R' 面の周(即ち A, B の両岸)は v 平面上に於て図の如き曲線平行四辺形に写像される、但しこゝに $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ は夫夫 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ の写像で、且

$$\beta' = \alpha' + 1, \quad \gamma' = \alpha' + 1 + \tau,$$

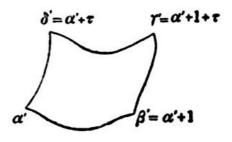
$$\delta' = \alpha' + \tau$$



第 47 図

$$\int_{\beta}^{\gamma} = \int_{(-B)} = 2iK,$$

$$\int_{\delta}^{\alpha} = \int_{(B)} = -2iK.$$



第 48 図

である, τ は 2iK': 4K を表す.

C >に於て $1, \tau$ を週期とする θ_1 函数を考へ、

$$\vartheta_1\left(v - \frac{c}{4K}\right)$$

なるものを z の函数と考へたとき R' 面内に幾箇の零点を有するかを調べよう. それには一般函数論で知れる如く

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_{R'} \frac{\frac{d}{dz} \vartheta_1 \left(v - \frac{c}{4K} \right)}{\vartheta_1 \left(v - \frac{c}{4K} \right)} \, dz$$

128 第六章 補遺

を計算すればよい. 変数をvとすれば

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_{R'} \frac{\vartheta_1' \left(v - \frac{c}{4K}\right)}{\vartheta_1 \left(v - \frac{c}{4K}\right)} dv$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{\alpha'}^{\beta'} + \int_{\beta'}^{\gamma'} + \int_{\gamma'}^{\delta'} + \int_{\delta'}^{\alpha'} \right\}.$$

然るに93頁に述べた如く

$$\frac{\vartheta_1'(v+1)}{\vartheta_1(v+1)} - \frac{\vartheta_1'(v)}{\vartheta_1(v)} = 0, \quad \frac{\vartheta_1'(v+\tau)}{\vartheta_1(v+\tau)} - \frac{\vartheta_1'(v)}{\vartheta_1(v)} = -2\pi i$$

であるから,

$$\int_{\alpha'}^{\beta'} + \int_{\gamma'}^{\delta'} = 2iK, \quad \int_{\beta'}^{\gamma'} + \int_{\delta'}^{\alpha'} = 0,$$

従つて

$$N = 1$$

を得る、即ち

$$\vartheta_1\left(v - \frac{c}{4K}\right) = 0$$

ならしめる z が唯一つ R' 面内に存在するのである. 然らばその z に対して

$$v - \frac{c}{4K} = m + n\tau$$

である, こゝにm,nは或る (任意ではない) 整数を表す. 両辺に4Kを乗じて移項すれば

$$u = c + m4K + n2iK'$$

となる. さて、上述の如く、u に斯様な値を与へる積分路 (0-z) が R' 面内に存在するのであるから、その両端をそのままとし途中を変じて更に A,B を夫々適当な方向に m,n 回横切る如き積分路とすれば確かに

u = c

ならしめることが出来る筈である。その積分路は一般には R' 面内にはないが,R 面内には勿論ある.

48. 代数的加法公式を有する函数

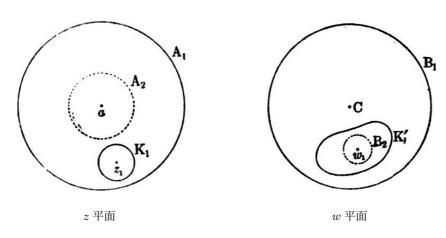
本節では第31節の終りに一寸述べたWeierstrass-Phragménの定理即ち代数的加法公式を有することが広義に於ける楕円函数の特徴なることを証明する,そのために、次の予備定理を要する.

定理 一価解析函数 f(z) が z=a に於て孤立真正特異点を有するとき,C を任意の一数とすれば C の任意の近傍に適当なる一数 C' をとつて,方程式

$$f(z) = C'$$

が a の任意の近傍に於て無数に多くの根を有する様にすることが出来る.

z 平面上に於て a を中心として任意の円 A_1 を画き,又 w=f(z) の平面上に於ても C を中心として任意の円 B_1 を画く.然るときは A_1 内に適当なる一数 z_1 をとれば之に対する $f(z_1)=w_1$ をして丁度 B_1 内に在らしめることが出来る.且こゝで $f'(z_1) \neq 0$ と考へることが出来る,何となれば z_1 を極めて僅か変動させても z_1, w_1 は 夫々 A_1, B_1 の外に出ないから,その範囲内で $f'(z_1) \neq 0$ なるやうな z_1 を取つてあると考へれば宜いからである.



第 49 図

然すれば z_1 の十分小なる近傍は w_1 の近傍と一対一の対応をなす,今 z_1 を中心とし A_1 内に於て a を含まない小円 K_1 を画きその写像を K_1 とする.

次に a を中心として半径が A_1 の半径の半分よりは小さく且 K_1 に達せざる円 A_2 を画き,又 w_1 を中心として K_1' の内部に円 B_2 を画く.然るときは前に A_1 , B_1 について考へたのと同様にして, A_2 内に適当な z_2 をとれば, $f(z_2)=w_2$ が B_2 内にあつて且 $f'(z_2) \neq 0$ なる様にすることが出来る. z_2 を中心とし a を含まざる小円を K_2 とし,その写像を K_2' とする.

斯様な手続を繰り返して次第に a に収斂する小円 K_1, K_2, K_3, \cdots 及びその写像 K_1', K_2', K_3', \cdots を作る。一般に K_n' に常に K_{n-1}' の内にあるから,すべての K_n' に共通に含まれる点が少くも一つある,之を C' とする。然すれば C' は各 K_n' 内にあるから各 K_n 内に夫々一つづゝ対応点をもつ,それが即ち方程式

$$f(z) = C'$$

の根で、 a の任意の近傍に無数に多くあること明かである.

注意 第 49 図では a を有限の点としてあるが、 $a = \infty$ でも証明の論法は同一である

系 a が極の集積点たる真性特異点でも本定理は成立する.

何となれば、もし f(z)=C が a の任意の近傍に無数に多くの根を有すれば本定理はそれで成立する、もし然らざれば

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - C}$$

なる函数を考へれば之は a を孤立真性特異点として有するから、之については本定理が成立する、従つて f(z) についても然り.

130 第六章 補遺

49. 代数的加法公式を有する函数 (続き)

先づ簡単のために f(u) を一価有理型函数とし、これが

$$R(\xi, \eta, \zeta) = 0 \tag{1}$$

なる代数的加法公式を有するものとする, 但しこゝに

$$\xi = f(u), \ \eta = f(v), \ \zeta = f(u+v),$$

又 R は常数のみを係数とする有理整函数を表す.

(1) を u 及び v に関して夫々微分すれば

$$\begin{split} \frac{\partial R}{\partial \xi} \frac{d\xi}{du} + \frac{\partial R}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial u} &= 0, \\ \frac{\partial R}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dv} + \frac{\partial R}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial v} &= 0. \end{split}$$

而して $\frac{\partial \zeta}{\partial u} = \frac{\partial \zeta}{\partial v}$ あるから、上の二式から直ちに

$$\frac{\partial R}{\partial \xi} \frac{d\xi}{du} - \frac{\partial R}{\partial n} \frac{d\eta}{dv} = 0 \tag{2}$$

を得る. (1), (2) の間に ζ を消去した結果を

$$R_1\left(\xi, \eta, \frac{d\xi}{du}, \frac{d\eta}{dv}\right) = 0\tag{3}$$

とし、この式に於てv = c(任意の常数)と置いたものを

$$R_2\left(\xi, \frac{d\xi}{du}\right) = 0$$

即ち

$$R_2\{f(u), f'(u)\} = 0 (4)$$

とする, 但し R_1, R_2 は何れも常数のみを係数とする有理整函数を表す.

(3) に於て v=c と置いたとき其結果が 0=0 となつては困るが、之に対しては次の様に考へる。 R_1 を ξ , $\frac{d\xi}{dt}$ の冪に従つて整頓し、

$$R_1 = \sum A_{i,j} \xi^i \left(\frac{d\xi}{du}\right)^j = 0 \quad \left(A_{i,j} \text{ は } \eta, \frac{d\eta}{dv} \text{ の有理整式}\right)$$

とする. R_1 は必ず $\frac{d\eta}{dv}$ 含む筈であるから、すべての A が形式的に 0 となることはない.依つて一つの A を 0 ならしめざる v の値を c とすればよい.もし又その A が v のすべての値で 0 になるならば、A の中の η , $\frac{d\eta}{dv}$ を夫々 ξ , $\frac{d\xi}{du}$ と書き直したものを R_2 とすればよい.

これで(4)なる微分方程式は常に得られることが判る.故に

定理 1. f(u) が代数的加法公式を有するならば,f(u) は常数のみを係数とする第一階の代数的微分方程式を満足せしめる.

その微分方程式

$$R_2(\xi, \xi') = 0$$
 $\left(\xi' = \frac{d\xi}{du}\right)$

を更にuで微分すれば,

$$\frac{\partial R_2}{\partial \xi} \xi' + \frac{\partial R_2}{\partial \xi'} \xi'' = 0.$$

之から

$$f''(u) = \xi'' = -\frac{\frac{\partial R_2}{\partial \xi}}{\frac{\partial R_2}{\partial \xi'}} \xi'$$

を得る, この右辺は ξ , ξ' の有理函数である. なほ逐次に微分することによつて ξ''' , … 等をすべて ξ , ξ' の有理函数として表すことが出来る. 故に

定理 2. f(u) が代数的加法公式を有するならば、 $f^{(n)}(u)$ $(n \ge 2)$ は f(u) 及び f'(u) の有理函数として表される.

さていよいよ本節の主題に入る. 今 f(u) は一価有理型と仮定して居るから、もしそれが $u=\infty$ に於て正則なるか又は極を有するならば f(u) は有理函数である.

もし又 $u=\infty$ に於て真性特異点を有するならば、それは孤立せるものか又は極の集積点である。依つて前節の予備定理により、適当な一数C'をとれば

$$f(u_1) = f(u_2) = \dots = C'$$

なる無数に多くの u_1, u_2, \dots を見出し得る. 之に対する

$$f'(u_1), f'(u_2), \cdots \tag{5}$$

なる値は何れも

$$R_2(C',x)=0$$

なる方程式の根になつてゐる筈であるが、一般に代数方程式は有限箇数しか相異なる根を有し得ないから、(5) の中には無数に多くの相等しい値があることを知る。それらに対する u の値を便宜上矢張り u_1, u_2, \cdots で表すこととすれば

$$\begin{cases} f(u_1) = f(u_2) = \cdots, \\ f'(u_1) = f'(u_2) = \cdots \end{cases}$$

となる. 然すれば定理2により一般に

$$f^{(n)}(u_1) = f^{(n)}(u_2) = \cdots \quad (n \ge 2)$$

でなければならぬ. 従つて f(u) の夫々 u_1 及び u_2 を中心とせる展開式は相一致しなければならぬ, 即ち

$$\begin{cases}
f(u) = c_0 + c_1(u - u_1) + c_2(u - u_1)^2 + \cdots, \\
f(u) = c_0 + c_1(u - u_2) + c_2(u - u_2)^2 + \cdots.
\end{cases}$$

この第一式に於てuを $u + u_1 - u_2$ に変へれば

$$f(u+u_1-u_2)=c_0+c_1(u-u_2)+c_2(u-u_2)^2+\cdots$$

132 第六章 補遺

となる. 之を第二式と比較すれば

$$f(u+u_1-u_2)=f(u).$$

即ち f(u) は $u_1 - u_2$ なる週期を有することを知る.

そこで今 $u_1-u_2=\omega$ と置き,数平面の原点と点 ω とを過る直線をg とし, ω の整数 倍の各点を過り g に垂線を引いて全平面を幅 $|\omega|$ なる帯状の無限面分に分けたとする, (ω は必ずしも基本週期ではないが,今作つた帯状面分を**週期帯**と呼ぶことにする.) 変数 u が一つの週期帯の内にあつて何れか一方の向きに無限遠に赴くとき $\lim f(u)$ が 存在するならば之をその方向に於ける**端値**といふ.一つの週期帯内で無限遠に赴く方 向が二つあるから其各について端値の存否が考へられる,たとへ両方とも存在すると しても其値は必ずしも相等しいと限らない.

さて今吾々の考へてゐる f(u) が上記の週期帯内で両方向共に端値を有する場合を考へる。こゝで

$$e^{\frac{2\pi i u}{\omega}} = z$$

と置けば f(u) は z の一価函数となる,之を $f(u)=\varphi(z)$ とする.この置換によつて u 平面の週期帯は z 平面の全部に対応し,週期帯の無限に延びた両端は z=0 及び ∞ に対応する.然るに仮定により f(u) は有理型で且端値を有するから, $\varphi(z)$ も $0,\infty$ 以外に於ては有理型で且 $0,\infty$ に於ても真性特異点を有することはない.故に $\varphi(z)$ は z の有理函数である.従つて此場合には f(u) は e^{cu} (但し $c=\frac{2\pi i}{\omega}$ は常数) の有理函数である.

次に f(u) が少くも一方の方向に於て端値を有せぬ場合を考へる.そのときは ∞ が f(u) の真性特異点であるから再び前節の予備定理を用ゐて

$$f(u_1') = f(u_2') = \cdots$$

なる如き無数に多くの点 u_1', u_2', \cdots を見出し得る。而もそれらは皆同一の週期帯内に引直してあると考へてよい。このことから前の如くにして f(u) は $u_1' - u_2'$ なる週期を有することが結論される。 u_1', u_2', \cdots は一つの週期帯内で ∞ に向つて収斂するものであるから, $u_1' - u_2'$ は前の ω とはその偏角が相等しくない様にとれる。依つて此場合には f(u) は二重週期を有することになる,而して有理型であるから,楕円函数である。

以上の結果をまとめると次の定理を得る.

定理 3. 一価有理型にして代数的加法公式を有する函数 f(u) は次の三種に限る.

- (1) *u* の有理函数,
- (2) $e^{cu}(c$ 常数)の有理函数,
- (3) *u* の楕円函数.

之を証明するのに吾々は先づ斯様な函数が定理1にいる如き微分方程式を満足せしめることを示し、その後は別に加法公式を利用しなかつたのである。故に定理3の仮設を改めて次の様にすることも出来る.

定理 4. 一価有理型にして常数のみを係数とする第一階の代数的微分方程式を満足せしめる函数は前定理の (1), (2), (3) に限る.

これ即ち第31節に述べたBriot-Bouquetの定理の特別の場合である.

50. 代数的加法公式を有する函数 (続き)

前節の定理3には「一価有理型」といふ仮定があつたが、今度はその仮定のない場合を考へて見よう.

函数 f(u) は u=0 に於て正則であるとし、その展開式を

$$f_0(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \cdots$$

とする, $f_0(u)$ は解析函数 f(u) の一原素である. $f_0(u)$ の収斂円を K_0 とし, その半径 を r とする. 今三点 u,v,u+v が共に K_0 内にある限り常に

$$R\{f_0(u), f_0(v), f_0(u+v)\} = 0$$
(1)

なる関係式が成立するものと仮定する,但しRは前の如く有理整函数を示す,而してなほ序にR(x,y,z)はx,y,zに関して既約であると考へる.

(1) は即ち代数的加法公式であるが,吾々はそれを f(u) の唯一つの原素 $f_0(u)$ だけについて仮定するのである.今 $f_0(u)$ は u=0 に於ける原素と考へてゐるが,これは他の点に於けるものとしても以下の論法には格別の影響はない,要するに何所かの一点に於ける原素について (1) 成立すると仮定すればよい.

今 $|u| < \frac{r}{2}$ とすれば (1) に於て v = u と置くことが出来るから,

$$R\{f_0(u), f_0(0), f_0(2u)\} = 0$$

となる, 之を

$$R_1\{f_0(u), f_0(2u)\} = 0 (2)$$

と書くことにする. R_1 が恒等的に 0 になる心配はない,何となれば若し 0 になるならば R が $f_0(u)-f_0(v)$ なる因数を有することになつて既約といふ仮定に反するからである.

 $f_0(u)$ の収斂半径は r であるから、(2) を |u| < r に於て考へるならば

$$R_1\left\{f_0\left(\frac{u}{2}\right), f_0(u)\right\} = 0 \tag{3}$$

としなければならぬ. (3) と

$$R_1\left\{f_0\left(\frac{u}{2^2}\right), f_0\left(\frac{u}{2}\right)\right\} = 0$$

との間に $f_0\left(\frac{u}{2}\right)$ を消去すれば

$$R_2\left\{f_0\left(\frac{u}{2^2}\right), f_0(u)\right\} = 0$$

の如き形の式を得る. 更に之と

$$R_1\left\{f_0\left(\frac{u}{2^3}\right), f_0\left(\frac{u}{2^2}\right)\right\} = 0$$

との間に $f_0\left(\frac{u}{2^2}\right)$ を消去して

$$R_3\left\{f_0\left(\frac{u}{2^3}\right), f_0(u)\right\} = 0$$

134 第六章 補遺

等. 次第に斯くして一般に

$$R_n\left\{f_0\left(\frac{u}{2^n}\right), f_0(u)\right\} = 0\tag{4}$$

を得る、これは |u| < r に於て成立する式である.

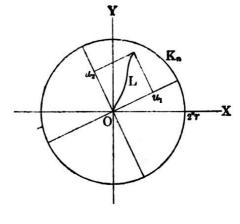
(4) の中で $f_0\left(\frac{u}{2^n}\right)$ は $|u|<2^nr$ に於て収斂する,故に今原点を中心とする半径 2^nr なる円を K_n と名づければ, $f_0\left(\frac{u}{2^n}\right)$ は K_n に於て一価正則である. $f_0(u)$ は K_0 の外では収斂しないが, $f_0(u)$ の一つの解析接続を $f_1(u)$ とすれば,u が K_n の内部にある限り

$$R_n\left\{f_0\left(\frac{u}{2^n}\right), f_1(u)\right\} = 0$$

が成立する(一致の定理). 斯様にして f(u) から生ずる直接又は間接の解析接続はすべて K_n 内では $f_0\left(\frac{u}{2^n}\right)$ と代数的の関係を有することが判る,従つてそれらの解析接続同志の間にも代数的関係が成立するのである. f(u) は必ずしも一価函数ではないから $f_0(u)$ の解析接続を種々に作る中には分岐点が現れることもあるかも知れぬが,とにかく K_n 内では一価正則なる $f_0\left(\frac{u}{2^n}\right)$ と代数的関係を保つのであるから, K_n 内に於ける f(u) の特異点は極又は代数的分岐点に限る筈である.

今 K_n 内に於て考へたのであるが,その n は何程でも大ならしめ得るのであるから,つまり数平面の任意の有限部分に於て f(u) は代数的特異点のみを有するのである.従つて又 K_n に於けるその特異点の数は有限である,何となれば若し無限にあれば K_n の内部又は周囲にその集積点たる真性特異点がなければならぬ,然らば K_{n+1} の内部に代数的ならざる特異点があることになつて不合理となるからである.

 K_n 内には有限箇しか特異点がないから、その何れをも過らない様に互に垂直



第50図

な二つの直径を引くことが出来る. 任意の一点 u_0 からその二つの直径に下した垂線 の足を u_1, u_2 とすれば

$$u_0 = u_1 + u_2$$

で、u が 0 から任意の曲線 L を書いて u_0 まで来るとすれば之に伴つて u_1,u_2 は夫々の直径上を往来することになる。この直径上には特異点がないから $f(u_1),f(u_2)$ は何れも $f_0(u)$ から各直径に沿うて唯一通りに定まる分枝によつて与へられる、換言すれば各直径の上だけで考へれば $f(u_1),f(u_2)$ は各一価函数である。そこで今曲線 L に沿うて $f_0(u)$ から接続して得る $f_0(u)$ なる値について考へるに、 $f(u_0),f(u_1),f(u_2)$ は何れも $f(u_0)$ から導かれた解析接続の一つの値で、もとの $f(u_0)$ については $f(u_0)$ については $f(u_0)$ なる加法公式が成立するのであるから、一致の定理により

$$R\{f(u_1), f(u_2), f(u_0)\} = 0$$

なる関係が成立しなければならぬ. こゝで $f(u_1)$, $f(u_2)$ は上述の如く一価であるから,

 $f(u_0)$ は高々有限価である.即ち R(x,y,z) の z に関する次数を g とすれば, $f(u_0)$ は高々 g 価である.この g は K_n には無関係なることに注意を要する.

円 K_n は何程でも大ならしめ得るから、結局次の如くいふことが出来る.

f(u) の一つの原素について (1) なる加法公式が成立するならば、f(u) は任意の有限変域に接続せられ、その特異点はすべて代数的で、その各分枝の間には代数的関係が成立し、又その分枝の数は一定数を越えない。

さてそこで f(u) のすべての分枝の基本対称式を作るとその中少くも一つは常数でないと考へてよい. (すべてが常数ならば f(u) 自身が常数となる.) その常数ならざる対称式を F(u) とすれば,F(u) は一価有理型である. 而して f(u) のすべての分枝は互に代数的関係を有するから,f(u) の一分枝と F(u) とも互に代数的関係を有する. 然るに f(u) の分枝については代数的加法公式が成立する,従つて F(u) に於ても然り. 依つて前節の定理 3 により,F(u) は同定理に挙げた三種の函数の中でなければならぬ. 然らば f(u) はそれの代数函数でなければならぬから,次の定理を得る.

定理 5. 解析函数 f(u) の一原素 $f_0(u)$ について代数的加法公式

$$R\{f_0(u), f_0(v), f_0(u+v)\} = 0$$

が成立するならば、f(u) は次の三種の中の何れかである.

- (1) и の代数函数,
- (2) $e^{cu}(c)$ 常数) の代数函数,
- (3) u の楕円函数の代数函数.

附録

楕円函数論の参考書に就いて

楕円函数論の初歩の部分ならば一般函数論の書物にも往々記載されて居る. 二三の 例を挙げれば

Harkness-Morley, Introduction to the Theory of Analytic Functions. (1898) Burkhardt, Funktionentheoretische Vorlesungen, I_1 , I_2 , II.

後者の II が楕円函数論である. Faber の改討を加へた新版がある (1920), 内容は可なり豊富であるが, 公式などに誤植が多いから注意を要する.

Hurwitz-Courant, Allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen. (1925)

また拙著函数論(裳華房発行)下巻にも楕円函数のことは一通り載つて居る. フランスの解析教程の類にも出て居る. 例へば

Goursat, Cours d'analyse mathématique, II. Jordan, Cours d'analyse, II.

特に後者は簡にして要をつくした名文である.

次に独立の書物で、先づ小さい実用向きの経便なものを挙げれば

Dixon, Elementary Properties of the Elliptic Functions. (1894)

Baker, Elliptic Functions. (1915)

King, On the Direct Numerical Calculation of Elliptic Functions and Integrals. (1924)

これらは専ら Jacobi の函数のみを書いたものである.

実際の計算家には公式集や数表が必要である. 公式集として有名なのは

Weierstrass (herausg. von Schwarz), Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Funktionen. (1893)

これは Weierstrass 流の楕円函数のみの公式集であるが、之に対して Jacobi 流の公式 集としては

Thomae, Sammlung von Formeln und Sätzen aus dem Gebiete, der elliptischen Funktionen. (1905)

138 付録 付録 付録 (138) (13

この書は記号の使ひ方が一風変つて居るのでそれに慣れないと一寸見にくいのが欠点である。例へば sn , cn , dn のことを sa , ca , da と書いたり(著者の意は sin am , cos am , $\operatorname{\Delta m}$ の略記だから此の方が合理的だといふのであらうが,今日一般の 慣用に反する),又 $\operatorname{sn}(u+K)$ 等の代りに括弧を省いて $\operatorname{sa} u+K$ などとしてある(誤 植ではない).

Kubota (窪田), Tables for the Use of Elliptic Functions. (1919)

これは売品となつて居るかどうか知らぬが、もし一般に手に入れられるならば非常に 便利なことと思ふ.

楕円積分の数値の表は Legendre の Traité にあるが、これは稀覯書でもあるし且又 その表の作り方が今日の吾々には使ひ易くない。之を現代的に改造し、且 $\vartheta(0)$ 等の表をも加へたものが理化學研究所の Scientific Papers, Vol. II の中の一冊として出て居る。即ち

Nagaoka(長岡)—Sakurai(櫻井), Tables of Theta-functions, Elliptic Integrals K and E, and Associated Coefficients in the Numerical Calculation of Elliptic Functions. (1922)

実用向の方面はこれだけに止める.

本書は楕円函数論の入門だけを述べたので、各種の問題に亙つて詳述することが出来なかつたから更に詳しく研究せんとする読者は相当の大著によつて勉強せられんことを希望する。邦文の書では

國枝元治, 楕圓函數論(共立社発行), 昭和七年.

上下二巻の予定であるが、下巻は未刊である.

外國のものでは

Hancock, Lectures on the Theory of Elliptic Functions, I. (1910)

Fricke, Die elliptishen Functionen und ihre Anwendungen, I, II. (1916-22)

Briot-Bouquet, Théorie des fonctions doublement périodiques. (1859)

Halpben, Traisé des fonctions elliptiques et de leur applications, I, II, III. (1886-91)

Appell-Lacour, Principes de la théorie des fonctions elliptiques. (1897)

Tannery-Molk, Eléments de la théorie des fonctions elliptiques, I, II, III, IV. (1893-1902)

もし出来るならば更に源泉に溯つて Jacobi, Weierstrass 等の全集を調べるが宜いと思 る. あまり古いものばかり挙げたから最後に一つ比較的新らしいのを追加する.

König-Krafft, Elliptische Funktionen. (1928)

これは大きな書物ではないが新らしい代数函数論を多分に取入れた点に於て他と類を異にして居る.

さて種々の書物を彼此参照するとき一番困ることは使用されて居る記号が互に一致 しないことである。前に述べた Thomae の如き甚しい変り方は例外であるが、印刷上 の都合からであらうか. \wp を p としたり ϑ を θ としたりする程度の異同は珍らしくない.

 ${
m sn}$ 函数の基本週期は 4K,2iK' で表すことに殆ど一致して居るが、 ${
m \wp}$ 函数のは人によってさまざまである。試みに余の調べた結果によると次の通りである。但し最上欄にあるのは本書に於で用ゐた記号である。

	$2\omega_1$	$-2\omega_2$	$2\omega_3$	e_1	e_2	e_3
Barkhardt *Halphen Tannery-Molk	$2\omega_1$	$-2\omega_2$	$2\omega_3$	e_1	e_2	e_3
Harkness-Morley Jordan 國枝	$2\omega_1$	$-2\omega_3$	$2\omega_2$	e_1	e_3	e_2
Dixon *Halphen Hancook 窪田 Weierstrass-Schwarz	2ω	$2\omega''$	$2\omega'$	e_1	e_2	e_3
Goursat	2ω	$2\omega''$	$2\omega'$	e_1	e_3	e_2
Appell-Lacour	2ω	$2(\omega + \omega')$	$2\omega'$	e_1	e_2	e_3
Hurwitz-Courant	ω_1	$\omega_1 + \omega_2$	ω_2	e_1	e_2	e_3
König-Krafft	ω_2	$\omega_1 + \omega_2$	ω_2	e_1	e_3	e_2
Fricke	ω_2	$\omega_1 + \omega_2$	ω_2	e_2	e_3	e_1
Briot-Bouquet	ω	$\omega + \omega'$	ω'			

^{*} Halphen の書の Tom. I. 94 頁に注意.

140 付録 附録

次にまた厄介なことは四種の ϑ 函数の番号のつけ方が人によつて種々に違ふことである。その対照表を作つて見ると次の如くである。

	$\vartheta_1(v)$	$\vartheta_2(v)$	$\vartheta_3(v)$	$\vartheta_0(v)$
Barkhardt Fricke Halphen Hancock Hurwitz-Courant 國枝 長岡,櫻井 Weierstrass-Schwarz	$artheta_1(v)$	$\vartheta_2(v)$	$artheta_3(v)$	$artheta_0(v)$
König-Krafft Tannery-Molk	$\vartheta_1(v)$	$\vartheta_2(v)$	$\vartheta_3(v)$	$\vartheta_4(v)$
Harkness-Morley	$\vartheta(v)$	$\vartheta_1(v)$	$\vartheta_3(v)$	$\vartheta_2(v)$
Jordan	$\theta(v)$	$\theta_1(v)$	$\theta_3(v)$	$\theta_2(v)$
Jacobi 窪田	$\vartheta_1(\pi v)$	$\vartheta_2(\pi v)$	$\vartheta_3(\pi v)$	$\vartheta(\pi v)$
Briot-Bouquet	$\theta_1(\omega v)$	$\theta_2(\omega v)$	$\theta_3(\omega v)$	$\theta(\omega v)$
Hermite	$-i\vartheta_{11}(v)$	$-\vartheta_{10}(v)$	$\theta_{00}(v)$	$\vartheta_{01}(v)$
Thomae	$\vartheta_{11}(\pi i v)$	$\vartheta_{10}(\pi i v)$	$\vartheta_{00}(\pi i v)$	$\vartheta_{01}(\pi i v)$

索引

E	イ 表示式	103 70 77	週期平行四辺形 週期母数 乗法公式 J J 函数の値 J(\tau) の基本領域 . 振幅
2		91	
η ₁ , η ₂ , η ₃	エ 	74 37 127 56 102	絶対不変式 Z
Ω $\omega_1, \omega_2, \omega_3$	オ 	104 61	第一種
加法定理	<i>h</i>	42	一の逆函数 一の数値計算 第二種 第二種楕円積分の 第三種 第二種格円積分の
基本週期平行四辺形 基本領域 Q_0, Q_1, Q_2, Q_3	‡	37 122 97	代数的加法公式
K'	<i>τ</i>	38 37 38 37 86	楕円の弧長 楕円積分の多価性 ―の標準形 ―の分類 楕円無理函数 ーの Riema ―の留数 単一週期函数
		41 44 69 69 87 75 81 76 98 50	ζ 函数 ——の加法公: ——の週期 Θ ϑ 函数
週期		31	· P19A · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·

週期平行四辺形 週期母数 第 3 4 4 5 5 5 5 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7	31 37 20 46 12 17
t	
	12 91
ζ函数 [,]	74
111111111111111111111111111111111111111	80 75
У	
	08
9	
第一種	70
第一種実楕円積分の計算	
	$\frac{22}{31}$
の数値計算 23, 5	$\frac{1}{27}$
第二種 9, 21, 7	70
- 弗→種悄門槙分の計算 10	U3
第三種	
(大数的加法公式 81, 81, 81, 81, 81, 81, 81, 81, 81, 81,	54 86
	$\frac{100}{28}$
τ	91
1141 41 1244	$\frac{37}{62}$
の一般的性質 (61
の特性 8	84
1 1 2 2 2 2	77 79
	19 06
精円積分	1
	16
	9 20
	$\frac{20}{13}$
——の Riemann 面	14
	15 33
ツ	
	74
	80 75
マノルロ 対 1 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	ιij
-	
Θ	07
0 T ML	o 1

142 索引

一の週期に対する性質 92 の無限乗積展開 95 一の零点 94 dn 函数 41
——の加法公式 44 =
二重週期函数
/\ Π
ヒ 標準形4
フ 部分分数式に相当する表示式
へ の 函数
₽ 函数と ϑ 函数との関係
補母数
サン
日数群 112 一に関して同等 114 一の基本領域 114 日数変換 112
ヤ Jacobi の楕円函数
5
λ
IJ
Liouville の定理65Riemann の標準形9
JV
Legendre の関係式75Legendre-Jacobi の標準形9
7
Weierstrass の標準形